This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Esta é uma cópia digital de um livro que foi preservado por gerações em prateleiras de bibliotecas até ser cuidadosamente digitalizado pelo Google, como parte de um projeto que visa disponibilizar livros do mundo todo na Internet.

O livro sobreviveu tempo suficiente para que os direitos autorais expirassem e ele se tornasse então parte do domínio público. Um livro de domínio público é aquele que nunca esteve sujeito a direitos autorais ou cujos direitos autorais expiraram. A condição de domínio público de um livro pode variar de país para país. Os livros de domínio público são as nossas portas de acesso ao passado e representam uma grande riqueza histórica, cultural e de conhecimentos, normalmente difíceis de serem descobertos.

As marcas, observações e outras notas nas margens do volume original aparecerão neste arquivo um reflexo da longa jornada pela qual o livro passou: do editor à biblioteca, e finalmente até você.

Diretrizes de uso

O Google se orgulha de realizar parcerias com bibliotecas para digitalizar materiais de domínio público e torná-los amplamente acessíveis. Os livros de domínio público pertencem ao público, e nós meramente os preservamos. No entanto, esse trabalho é dispendioso; sendo assim, para continuar a oferecer este recurso, formulamos algumas etapas visando evitar o abuso por partes comerciais, incluindo o estabelecimento de restrições técnicas nas consultas automatizadas.

Pedimos que você:

- Faça somente uso não comercial dos arquivos.
  A Pesquisa de Livros do Google foi projetada para o uso individual, e nós solicitamos que você use estes arquivos para fins pessoais e não comerciais.

- Evite consultas automatizadas.
  Não envie consultas automatizadas de qualquer espécie ao sistema do Google. Se você estiver realizando pesquisas sobre tradução automática, reconhecimento ótico de caracteres ou outras áreas para as quais o acesso a uma grande quantidade de texto for útil, entre em contato conosco. Incentivamos o uso de materiais de domínio público para esses fins e talvez possamos ajudar.

- Mantenha a atribuição.
  A "marca dágua" que você vê em cada um dos arquivos é essencial para informar as pessoas sobre este projeto e ajudá-las a encontrar outros materiais através da Pesquisa de Livros do Google. Não a remova.

- Mantenha os padrões legais.
  Independentemente do que você usar, tenha em mente que é responsável por garantir que o que está fazendo esteja dentro da lei. Não presuma que, só porque acreditamos que um livro é de domínio público para os usuários dos Estados Unidos, a obra será de domínio público para usuários de outros países. A condição dos direitos autorais de um livro varia de país para país, e nós não podemos oferecer orientação sobre a permissão ou não de determinado uso de um livro em específico. Lembramos que o fato de o livro aparecer na Pesquisa de Livros do Google não significa que ele pode ser usado de qualquer maneira em qualquer lugar do mundo. As conseqüências pela violação de direitos autorais podem ser graves.

Sobre a Pesquisa de Livros do Google

A missão do Google é organizar as informações de todo o mundo e torná-las úteis e acessíveis. A Pesquisa de Livros do Google ajuda os leitores a descobrir livros do mundo todo ao mesmo tempo em que ajuda os autores e editores a alcançar novos públicos. Você pode pesquisar o texto integral deste livro na web, em `http://books.google.com/`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644574 7

TRATADO

DE

MECANICA GERAL

TRATADO

DE

MECANICA GERAL

POR

ALFREDO C. DE MORAES REGO

E

ANTONIO G. DE MORAES REGO

EX-GUARDAS-MARINHA
MAJORES DO ESTADO MAIOR DE 1ª CLASSE, DOUTORES EM MATHEMATICA E SCIENCIAS PHYSICAS,
LENTES CATHEDRATICOS DA ESCOLA MILITAR

(NATURAES DO MARANHÃO)

TOMO PRIMEIRO

> ..... persuadé qu'en fait de mathématique il n'y a à profiter que dans les methodes, que les livres qui ne consistent qu'en détail ou en propositions particulières, ne sont bons qu'à faire perdre du temps à ceux qui les font, et à ceux qui les lisent.
>
> MARQUIS DE L'HOPITAL — *Des infiniments petits.*

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1897

1234-96

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
1905

OBRAS DOS MESMOS AUTORES

Parecer sobre o projecto de montepio obrigatorio.

Projecto de reorganisação das forças arregimentadas.

Elementos de algebra ou calculo das funcções directas.

These de concurso á cadeira de geometria da Escola Militar.

Tratado de algebra superior (propriedade da Escola Militar).

Tratado de geometria differencial, 1º vol. (propriedade da Escola Militar).

A' SAGRADA MEMORIA

DOS

TRES GRANDES E INOLVIDAVEIS SOLDADOS

Deodoro da Fonseca,

Benjamin Constant

Floriano Peixoto.

INDICE

PREAMBULO GERAL

	Pags.
Bases da mecanica.	1
Composição das impulsões	14
Relação entre as impulsões, velocidades e massas.	23
Choque	30
Pendulo	58
Principio de d'Alembert.	76
Principio das velocidades virtuaes.	80
Lei de Lagrange	92
Calculo das variações.	109

COORDENAÇÃO ESPECIAL

Composição das forças.	243
Theoria dos momentos	276
Theoria dos conjugados	322
Centro de gravidade	357
Composição de attracções.	491

PREAMBULO GERAL

Philosophicamente considerado, o conjuncto de nossos conhecimentos apresenta duas partes perfeitamente distinctas e intimamente relacionadas: uma concreta, especial, essencialmente pratica; outra abstracta, geral, verdadeiramente scientifica. A primeira tem por objecto o estudo dos seres considerados em sua existencia especial; a segunda os aprecia e os faz conhecer sob o ponto de vista de suas propriedades essenciaes, formulando as leis que as regem.

Nesta segunda parte convém fazer uma divisão fundamental correspondente á distincção dos corpos em *inorganicos* e *organicos*, positivamente caracterisada pelo phenomeno geral da vida. As sciencias relativas ao primeiro destes dois grupos são classificadas sob a denominação commum de *Cosmologia*, e as sciencias relativas ao segundo sob a denominação geral de *Sociologia*.

Em qualquer destes grupos as sciencias correspondentes são constituidas pelas leis geraes e abstractas a que se acham subordinados os differentes phenomenos exteriores que ellas estudam, os quaes, mediante a faculdade de abstrahir, nos é dado considerar independentemente dos corpos que constituem sua séde natural.

A mais ligeira observação mostrando que qualquer ser vivente necessita incontestavelmente de um meio inorganico que lhe forneça os elementos indispensaveis á sua manutenção, deixa-nos facilmente comprehender a subordinação necessaria em que se acham os phenomenos sociologicos para com os phenomenos caracteristicos do meio inorganico. A cosmologia, pois, representa a base de todo o nosso edificio scientifico.

Este grupo compõe-se de quatro sciencias abstractas: *mathematica*, *astronomia*, *physica* e *chimica*, comprehendendo a mathematica tres partes: o *calculo*, a *geometria* e a *mecanica*.

A ordem desta classificação nada tem de arbitraria, sendo ella feita segundo o grão de simplicidade e generalidade decrescentes e complexidade crescente dos phenomenos correspondentes, de modo que, á proporção que se avança na escala, os phenomenos vão se tornando mais complexos pela inevitavel dependencia em que vão ficando de todos os outros estudados pelas sciencias anteriores áquella que se considera.

Tendo a astronomia por objecto o estudo das relações do nosso mundo com os demais corpos do systema planetario, a physica e a chimica estudando-o sob o ponto de vista de sua existencia particular, na serie cosmologica a mecanica vem a representar o laço de união entre a mathematica e a physica quando consideramos os phenomenos relativos especialmente á Terra.

Na mathematica, o calculo estuda os phenomenos numericos, a geometria as leis da extensão e a mecanica as leis do movimento.

Procurando conhecer o movimento de um corpo tal como elle se nos apresenta no meio em que vivemos, duas difficuldades extraordinarias surgem immediatamente: a primeira concernente á natureza do motor que determina o deslocamento; a segunda relativa á actividade, propria, inherente á

constituição do movel, a qual póde modificar o movimento recebido da acção exterior. O motor, comprehende-se, póde ser qualquer : a electricidade, a gravidade, uma impulsão muscular, a distensão de uma mola, etc. ; de modo que, si no estudo do movimento tivessemos de entrar com a apreciação de taes elementos, iria a mecanica, anarchicamente, intervir no dominio das sciencias superiores, o que só lhe poderia acarretar difficuldades que perfeitamente podem ser afastadas, uma vez que a abstracção permitte-nos considerar os phenomenos do movimento inteiramente isolados de todos os outros mais complexos que com elles concorrem.

Relativamente á actividade propria á organisação do movel, si a pretendessemos levar em conta, seria inteiramente absurdo formular uma lei qualquer do movimento, desde que a regularidade deste ficasse á mercê das modificações espontaneas provenientes dessa actividade, e sempre para nós desconhecidas.

As concepções destinadas a eliminar estas duas ordens de difficuldades é que constituem a base logica da mecanica, dando-lhe um caracter geral, desde então compativel com todos os corpos.

Vejamos em que consistem essas concepções.

Nos facultando a abstracção o podermos considerar qualquer phenomeno independentemente de todos os outros mais complexos, as questões relativas á natureza do motor desapparecem, desde que abstraiamos deste para só contemplar o deslocamento produzido ; nestas condições, seja o motor a electricidade, a impulsão muscular ou outro qualquer, desde que a acção por elles produzida é a mesma, em mecanica são elles considerados equivalentes ; si os effeitos são differentes, os motores são considerados differentes.

A abstracção leva-nos assim a substituir as causas especiaes do movimento pela noção abstracta dos effeitos por ellas determinados, ficando deste modo o motor positivamente caracterisado pelas leis do deslocamento considerado.

Ao movimento, sob este aspecto considerado, realisado ou tendendo a realisar-se sob a acção do motor, e cujas leis ficam naturalmente independentes da natureza especial deste, é o que se denomina *força*.

A noção de força torna-se assim positiva e afasta completamente a concepção metaphysica das entidades exteriores, incompativel com a estabilidade indispensavel aos phenomenos de movimento, como a outros quaesquer, para que elles possam comportar uma lei mathematica.

A instituição do espaço, formulada na geometria, ao mesmo tempo que offerece uma idéa para representar os phenomenos de movimentos isolados de sua localisação objectiva, permitte eliminar as difficuldades relativas á existencia da actividade propria á organisação real dos corpos.

Como sabe-se, em geometria o espaço é uma concepção puramente subjectiva, tem por fim facilitar-nos o estudo das leis geraes que regem os differentes phenomenos exteriores de fórma e situação.

Consiste ella em um meio gazoso, de menor densidade que o nosso meio atmospherico, inerte, sem côr, sem odor, podendo solidificar-se em qualquer parte de sua extensão, e no qual pódem ser localisados os phenomenos quando pela abstracção separados dos corpos que constituem sua séde.

Abstrahindo, pois, da constituição physica e chimica dos corpos e concebendo as suas fórmas solidificadas no espaço, a constituição subjectiva que dahi resulta para elles será inteiramente inerte, de conformidade com a natureza do meio, e em taes condições os movimentos de que os supposermos animados podem ser abstractamente apreciados sem que o perturbem actividades interiores, desde então, substituidas por forças exteriores de effeitos correspondentes.

A noção de *inercia*, pois, em mecanica resulta da localisação subjectiva de um corpo no espaço geometrico, destinada precisamente a eliminar as reacções interiores proprias a

sua constituição physica ou chimica, é uma noção scientifica naturalmente impossivel de uma existencia objectiva.

Considerando a mecanica os corpos e os motores sob o ponto de vista subjectivo, as theorias que ella institue são theorias geraes, cuja applicação objectiva ou pratica apresenta necessariamente todas as complicações que pela abstracção foram eliminadas, as quaes surgirão desde que pretendamos por ellas desvendar a realidade exterior, levando em conta a natureza dos motores e dos corpos.

E' exactamente este o maior e mais grave impecilio na passagem do dominio abstracto para o dominio concreto nas questões do movimento.

Não nos sendo possivel realizar um tal aperfeiçoamento scientifico, os nossos recursos devem limitar-se, como de facto limitam-se, a modificar as leis abstractas por meio de regras provenientes de repetidas experiencias, sem jámais pretender formular leis concretas geraes.

A localisação dos corpos e dos movimentos no espaço, graças à natureza deste meio, nos deixa facultativo o simplifical-os quer sob o ponto de vista geometrico da fórma, quer sob o ponto de vista mecanico do movimento, de maneira a que possamos estudar os typos mais simples do dominio mecanico para depois, gradualmente, irmos complicando a questão até abordarmos o seu problema fundamental.

Este problema, de parte as questões especiaes que só a pratica cabe considerar, póde ser formulado como reduzindo-se *a combinação de movimentos concorrendo por composição directa ou communicação mutua.*

Suppondo no espaço um corpo reduzido a um ponto e este submettido a differentes translações, cada uma dellas conhecida, a primeira parte do problema, que é relativa a este caso, consiste em determinar-se qual o movimento resultante, para o ponto, da coexistencia de todos ; concebendo agora o corpo como composto de outros corpos ou pontos reunidos por um

determinado modo de ligação, formando um systema, sendo cada parte sujeita a movimentos dados, a segunda parte do problema fundamental, relativa a este caso, consiste em combinar-se o movimento total de cada parte com os de todas as outras para obter o movimento final do conjuncto.

Sob este duplo aspecto a questão póde dar logar a uma marcha inversa em que se procure ou determinar as translações capazes de, combinadas, dar logar a uma translação conhecida, de que suppõe-se animado um ponto do espaço; ou determinar os movimentos totaes dos corpos ou pontos de um systema, conhecido o movimento proveniente de sua combinação.

Relativamente á primeira parte do problema fundamental a solução desta questão é possivel e muitas vezes exigida; quanto á segunda porém, as difficuldades são de tal ordem que é preferivel abandonal-a.

Em qualquer dos dous casos da questão directa convém estabelecer uma distincção essencial, de onde resulta a divisão normal do dominio da mecanica.

Na concurrencia das forças que actuam sobre um ponto ou um systema qualquer, essas forças podem, pelas condições de suas direcções e intensidades, gradualmente neutralisarem-se, de sorte que do seu concurso nenhum deslocamento resulta para o ponto ou para o systema, isto é, fica o ponto ou systema em *equilibrio*. Dahi a necessidade de considerar, sob o ponto de vista mecanico, estes dois casos: ou as forças concurrentes dão logar ao *equilibrio* ou a um movimento resultante; o estudo das questões relativas ao primeiro constitue a parte da mecanica denominada *estatica*, e o estudo das questões proprias ao segundo, constitue a parte denominada *dynamica*, tendo assim, respectivamente, por objecto a apreciação das actividades neutralisadas ou das actividades em acção.

Os phenomenos relativos a estas duas partes da mecanica apresentam entre si uma differença que convém formular

como sendo fundamental, e vem a ser que no estado de equilibrio não ha necessidade de considerar-se o tempo, pois, sendo as forças neutralisadas na combinação de suas acções simultaneas, podem ser, nessas condições, consideradas como instantaneas, simples impulsões então julgadas pelas respectivas pressões; no segundo caso, porém, de um movimento resultante, a consideração do tempo é indispensavel, pois ahi as forças teem de ser julgadas na continuidade de sua acção.

Referidos os casos de equilibrio tão sómente á consideração das impulsões, fica a estatica exigindo apenas para sua elaboração o estudo do movimento uniforme e por conseguinte simplesmente dependente das leis fundamentaes do movimento, fornecidas pela inducção tirada da observação dos factos, de fórma que, considerando o equilibrio como um caso particular do movimento, póde essa parte da mecanica ser desenvolvida sem que de modo algum necessite da solução do principal problema da dynamica.

Quanto á distincção proveniente da consideração objectiva dos estados *solido* e *fluido*, convém normalmente afastal-a, pois que sendo os corpos na mathematica referidos ao espaço, e, portanto, abstrahindo-se das acções interiores proprias á sua constituição, a fluidez, proveniente sem duvida de taes acções, fica naturalmente excluida de semelhante dominio, occupando-se a mecanica sómente com o estudo dos corpos *solidos* e deixando á physica a apreciação dos fluidos, cuja constituição especial ahi deve indicar quaes as modificações a fazer-se nas leis abstractas para que ellas possam abranger taes estados dos corpos.

Uma unica distincção secundaria é preciso manter e vem a ser, sob o aspecto geometrico, quanto á fórma do movel, que póde ser um ponto ou um systema. Esta distincção em mecanica traduz-se pela differença entre a *translação* e a *rotação*, pois, que no primeiro destes movimentos o deslocamento do corpo podendo ser sempre julgado pelo movimento de qualquer de seus pontos, reduz-se a questão a este caso

fundamental; emquanto que no segundo cada parte do corpo tem um movimento distincto. Ora, considerando a estatica tão sómente as impulsões ou forças instantaneas, semelhante distincção é ahi destituida de importancia, sendo indispensavel na dynamica onde a rotação apresenta-se como uma questão capital.

Estabelecida a divisão normal da mecanica e formulado o seu duplo problema fundamental a solução deste deve ser preparada pelo estudo dos typos mais simples em que se o possa decompor, de modo a poder-se gradualmente chegar á solução da questão complexa alli formulada.

Como dissemos, esse problema apresenta dois casos: um em que procuramos o movimento de translação resultante para um ponto submettido a differentes impulsões conhecidas; o outro em que procuramos o movimento total de um systema definido, combinando os movimentos totaes de suas partes.

Sob o primeiro aspecto temos, pois, duas questões a considerar: 1ª o estudo do movimento isolado; 2ª o estudo dos movimentos combinados; sob o segundo aspecto a questão exige como base a apreciação do typo menos complexo relativo á communicação do movimento entre corpos distinctos, porém ligados.

Os casos mais simples relativos a estas tres ordens de questões são perfeitamente estudados mediante tres leis obtidas por inducção da experiencia e observação directa: a lei de Kepler, a lei de Galilêo e a lei de Newton, as quaes representam a base physica da mecanica geral.

A 1ª lei, relativa ao movimento isolado, consiste em que *todo movimento é naturalmente rectilineo e uniforme.*

Para bem comprehendel-a façamos ligeiras considerações necessarias.

Desde que o tempo é um elemento essencial para julgarmos dos movimentos, torna-se indispensavel adoptar uma unidade correspondente, nem só para avaliação desse ele-

mento, como tambem para guiar-nos na comparação dos diversos movimentos.

Tomando, por exemplo, *t* para unidade de tempo, si um corpo percorre nesse tempo um espaço maior que o que percorre um outro corpo no mesmo tempo, conclue-se que o movimento do primeiro é mais rapido que o do segundo; si os espaços percorridos são iguaes, os movimentos teem a mesma rapidez. O espaço percorrido pelo movel na unidade de tempo é o que se denomina *velocidade* do movimento; si este espaço é constante, ou por outra, si o movel percorre espaços iguaes em tempos iguaes, o movimento se diz *uniforme*, no caso contrario o movimento se diz *variado*.

O espaço percorrido por um corpo sujeito á acção de uma força póde apresentar differentes fórmas, uma linha recta ou uma curva qualquer, e segundo essa fórma o movimento diz-se *rectilineo* ou *curvilineo*.

Assim, pois, o movimento uniforme rectilineo vem a ser, quer geometricamente, quer sob o ponto de vista mecanico, o typo mais simples que podemos considerar.

A lei de Kepler estabelece que si uma força actuando sobre um corpo, vem a suspender sua acção, e si não houver causas exteriores que intervenham para de qualquer fórma modificar o deslocamento recebido, o movimento desse corpo tende a tornar-se desde esse instante uniforme e rectilineo, isto é, o corpo tende a adquirir uma velocidade constante, seguindo uma mesma direcção.

Devemos destacar nesta lei duas partes distinctas, uma que refere-se á fórma do espaço percorrido, e outra relativa á natureza da velocidade.

Para praticamente verificarmos a primeira parte bastanos citar o exemplo, muito commum, da funda.

Como sabe-se, esta arma compõe-se de um pequeno circulo de sóla, tendo uma abertura no centro e preso a cada extremidade de um diametro um cordão. Para utilisal-a colloca-se uma pedra ou outro corpo que se deseje atirar,

na abertura central, colhem-se os dous fios e fazendo-se fixo o braço, com o jogo da mão imprime-se ao apparelho um movimento circular; em virtude das ligações do systema e da força muscular empregada, a pedra é forçada ao movimento curvilineo; si soltar-se porém um dos cordeis de modo a que o disco não mais retenha o projectil, este escapa-se seguindo uma linha recta tangente á curva que era obrigado a descrever.

Quanto á segunda parte, apresentaremos a seguinte experiencia, citada por Poisson. Si no vacuo, sobre um plano horisontal e sem attrito, collocarmos uma particula de ferro sujeita sómente á acção do pólo de um iman, essa particula mover-se-ha immediamente em direcção ao centro da attracção; fazendo cessar, pela intervenção de um outro iman, a acção do primeiro, o movimento do corpo continuará para o mesmo ponto, porém tornando-se uniforme, e com tanto maior velocidade quanto mais demorada houver sido a acção da força attrahente.

A esta lei devemos reunir um complemento normal, formulado por Carnot, mediante inducção baseada na observação dos phenomenos do choque, e relativa á direcção das forças passivas, que muitas vezes concorrem com as forças activas nos phenomenos mecanicos. Este complemento estabelece que a resistencia offerecida por um corpo é sempre normal á superficie correspondente.

Para verificar esta regra, a experiencia é a seguinte: tomam-se duas espheras iguaes, perfeitamente duras e imprime-se-lhes velocidades iguaes, na mesma direcção e em sentidos contrarios; dado o choque, a observação mostra que as espheras ficam em repouso; si as direcções das velocidades não são as mesmas, isto é, si ellas formam entre si um angulo qualquer, de modo a não dar-se o choque segundo a linha dos centros das espheras, linha normal ás superficies correspondentes, como acontece no primeiro caso, após o choque deixa de dar-se o equilibrio. Este resultado ainda

é o mesmo augmentando-se a massa de uma das espheras e, na mesma proporção, a velocidade da outra.

Ora, como no conflicto que constitue esta experiencia concorrem as forças activas e as forças passivas, representadas pela resistencia que um corpo offerece ao outro no momento do encontro, a conclusão a tirar-se dos resultados é que no conflicto de dous corpos as impulsões a que elles forem sujeitos só podem neutralisar-se quando suas direcções forem simultaneamente perpendiculares á superficie do contacto, o que importa dizer que toda resistencia é sempre dirigida segundo a normal á superficie correspondente.

Bem meditada a lei de Kepler póde ser filiada a uma das grandes leis formuladas por A. Comte, conhecida sob a denominação de *lei de persistencia* e cujo enunciado consiste *em que todo estado estatico ou dynamico tende a persistir espontaneamente, sem nenhuma alteração, resistindo ás perturbações exteriores.*

Esta verdade universal póde ser com facilidade verificada objectivamente, d'onde ella emanou por inducção, de innumeros factos, quer individuaes, quer collectivos da existencia humana.

Basta-nos citar essa tendencia, conhecida sob a denominação de *habito*, que apresenta o nosso organismo em repetir espontaneamente um acto por elle realizado muitas vezes.

Mesmo as qualidades moraes e o caracter tendem a persistir atravez as gerações: familias ha em que a probidade, as boas inclinações, a bondade são legados perpetuos; outras ha nas quaes os vicios resistem á acção energica da mais rigorosa educação.

São esses resultados de uma observação quotidiana que a sabedoria popular, sempre tão justa, resumiu nos seus conhecidos proloquios; *Cesteiro que faz um cesto, faz um cento; tal pae tal filho; filho de peixe sabe nadar.*

Nos organismos collectivos essa lei manifesta-se pela resistencia que sempre encontra nas sociedades o governo

que tende a reformal-as; resistencia que muitas vezes attinge as proporções de uma verdadeira revolução.

A lei de Kepler formulando a tendencia natural dos corpos em seus movimentos para manterem a constancia da direcção e do espaço percorrido em um dado tempo, constitue assim uma verificação da lei da persistencia no dominio mathematico, pois que, no movimento uniforme rectilineo, considerando como phase inicial o espaço percorrido na primeira unidade de tempo, o corpo, durante todo seu trajecto, nada mais realisa que a repetição, quer quanto á direcção, quer quanto á velocidade, do seu estado dynamico inicial, desde que forças quaesquer não o venham perturbar. No caso de dar-se esta intervenção, o movimento modifica-se, porém, como prova a experiencia, o corpo persiste em manter a constancia de direcção e velocidade, tanto assim que uma vez cessada a acção perturbadora o movimento adquire o caracter uniforme.

A segunda lei ou a lei de Galilêo, consiste *na coexistencia espontanea de translações quaesquer que se combinam sem perturbarem-se mutuamente, effectuando-se cada uma dellas como si as outras não existissem.*

Suppondo, pois, os differentes pontos de um corpo sujeitos ás mesmas translações simultaneas, em virtude desta lei evidentemente o movimento do corpo se realisará sob a acção de cada translação commum a todos seus pontos, como si os effeitos de todas as outras fossem nullos. Esta simultaneidade e independencia dos effeitos das impulsões tem como consequencia não alterar-se, sob o ponto de vista estatico, a constituição do corpo, mantendo-se as suas distancias e direcções mutuas, de modo que o movimento de translação resultante não influe absolutamente nos movimentos proprios que possa ter cada parte relativamente ás outras, isto é, o movimento commum a todas as partes do corpo é independente dos movimentos particulares de cada uma dellas desde que no movimento do conjuncto cada parte percorra espaços iguaes e na mesma direcção.

Sob este ponto de vista interpretada, esta lei exige, para verificar-se, isto é, para que o movimento commum se harmonise, concorrendo, com os movimentos particulares dos elementos, que esse movimento commum seja de natureza a manter inalteraveis as distancias e as direcções mutuas. Esta condição essencial exclue immediatamente da lei os casos relativos á rotação, nos quaes os diversos pontos do corpo teem movimentos distinctos, conforme as suas distancias ao eixo de rotação, e as distancias mutuas tendem a ser modificadas, sendo mesmo as differentes partes desaggregadas si sufficientemente rapido for o movimento.

E' sob este aspecto, principalmente, que a lei de Galilêo póde ser evidentemente verificada pela observação.

Si um bond, por exemplo, move-se em linha recta cada passageiro mantém sempre a mesma distancia dos que lhe ficam ao lado; cada um realisa seus movimentos proprios como si o vehiculo estivesse parado, o movimento commum é o movimento de translação; porém ao descrever uma curva as perturbações surgem immediatamente, os passageiros são atirados para a extremidade exterior do banco, e si o cocheiro não tem a prudencia de diminuir a velocidade, os individuos desta extremidade podem ser lançados fóra.

Tomando um desses apparelhos utilisados em physica para demonstrar o achatamento da Terra, collocando sobre elle alguns pequenos insectos, e imprimindo-se-lhe um movimento de translação observa-se que os animaes movem-se despreoccupados como si o apparelho estivesse em repouso; si, porém, dermos a este um movimento de rotação por meio da manivella e lhe augmentarmos gradualmente a rapidez nota-se que os insectos, sentindo alguma influencia que perturba os seus movimentos já não se mostram tão despreoccupados como anteriormente, e este facto traduz-se por uma locomoção mais vagarosa; si continuar a augmentar a rapidez da rotação chega-se a um ponto em que cessa completa-

mente a locomoção, empregando os animaes todos os esforços para manterem-se seguros á superficie do apparelho, donde são repellidos quando a rapidez do movimento torna-se sufficientemente grande.

Citaremos, finalmente, como uma das verificações mais importantes desta lei, a independencia completa dos diversos movimentos proprios ás differentes partes de nosso organismo com o seu movimento total de locomoção, e a sua immediata perturbação desde que effectuemos uma rotação rapida ou muito demorada ; o incommodo do enjôo a bordo não é mais que uma consequencia da influencia perturbadora do duplo movimento da rotação do navio, de prôa á popa e bombordo a boreste.

Estes factos de observação tornam bem evidente a intima ligação entre as leis da *persistencia* e *independencia*, pois nelles vemos a naturalidade e espontaneidade da translação manifestar-se pela harmonia com que em semelhante movimento mantem-se a constituição estatica ou dynamica de cada uma das partes com o movimento commum do conjuncto, o que não acontece com a rotação.

Por conseguinte a independencia proclamada pela lei de Galilêo só se verifica quando os corpos movem-se segundo a lei de Kepler.

Abstractamente considerada a primeira destas leis levanos facilmente a formular as regras proprias á composição das impulsões, quer estas se achem sobre o mesmo plano, quer em planos differentes.

Consideremos o caso fundamental de duas impulsões pois, como veremos mais adiante, a elle podem ser reduzidos todos os outros mais complexos.

Supponhamos (fig. 1) o ponto M animado de dous movimentos uniformes e rectilineos segundo as direcções Mx e My; seja v_1 a velocidade do primeiro e v_2 a do segundo, isto é, os espaços percorridos pelo movel na unidade de tempo em virtude da acção de cada uma das impulsões.

Conforme a lei de Galilêo o facto realisa-se como si o ponto M se movesse segundo a direcção Mx com uma velocidade v_1 e ao mesmo tempo a recta Mx se deslocasse parallelamente a si mesma, percorrendo o ponto M a recta My com uma velocidade igual a v_2, de modo que cada um dos pontos da recta movel se achasse animado de uma velocidade igual e parallela a v_2.

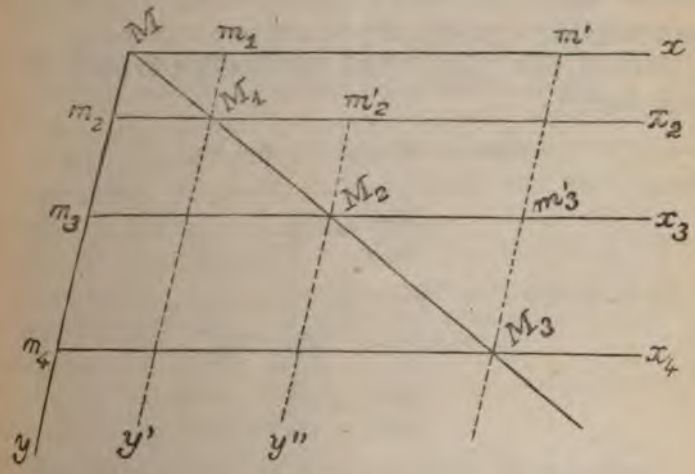


Fig. 1

Suppondo que o movel no fim de um intervallo t' do tempo t em virtude do primeiro movimento chega á posição m_1, e que durante este tempo a recta Mx deslocando-se tenha passado á posição $m_2\ x_2$, tirando por m_1 uma parallela a My, M_1 será a situação do movel sujeito á acção das duas impulsões; considerando um segundo intervallo de tempo t'' e suppondo que no fim desse intervallo o ponto tem attingido a situação m'_2, em consequencia do primeiro movimento, e que nesse tempo a recta $m_2\ x_2$ tenha passado á posição $m_3\ x_3$, tirando por m'_2 uma parallela a My, a situação real do movel será M_2; considerando como terceiro e ultimo intervallo t''' do tempo t, e suppondo o ponto, que se acha em M_2, levado

á posição m'_3, em virtude do primeiro movimento, e durante esse tempo a recta $m_3 x_3$ passando á situação $m_4 x_4$, a posição no fim do tempo t do ponto M sujeito ás duas impulsões será M_3.

Sendo a velocidade o espaço percorrido na unidade de tempo, e sendo nos movimentos uniformes esta velocidade constante, segue-se que para termos em semelhante movimento o espaço percorrido no fim de um certo tempo bastanos multiplicar a velocidade pelo tempo considerado.

Resulta, pois, para os dous movimentos do ponto M, no fim do tempo t' :

$$Mm_1 = m_2 M_1 = v_1 t' \quad , \quad Mm_2 = v_2 t'$$

d'onde

$$\frac{Mm_2}{m_2 M_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

no fim do tempo $t' + t'' = t_1$, teremos :

$$m_3 M_2 = v_1 t_1, \quad Mm_3 = v_2 t_1$$

ou

$$\frac{Mm_3}{m_3 M_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Finalmente no fim do tempo $t' + t'' + t''' = t$, teremos:

(1) $$Mm_4 = v_2 t, \; m_4 M_3 = v_1 t$$

ou

$$\frac{Mm_4}{m_4 M_3} = \frac{v_2}{v_1} .$$

Da comparação destas relações, resulta:

$$\frac{Mm_2}{m_2 M_1} = \frac{Mm_3}{m_3 M_2} = \frac{Mm_4}{m_4 M_3}$$

Referidas á figura (1) estas igualdades traduzem a proporcionalidade das linhas Mm_2, Mm_3, $m_2 M_1$, $m_3 M_2$, etc., o que indica acharem-se os pontos M, M_1, M_2 e M_3 situados sobre uma mesma recta. Unindo, pois, o ponto M ao ponto M_3 essa linha representará a direcção do movimento do

ponto, proveniente da simultaneidade das duas impulsões consideradas.

Prolongando a recta $m'_3 M_3$ até encontrar Mx vê-se que a direcção resultante vem a ser dada pela diagonal do parallelogrammo construido sobre as direcções dos dous movimentos concorrentes.

Tomando o tempo t para unidade de tempo as relações (1) nos dão:

$$Mm_1 = v_2, \quad m_1M_3 = Mm' = v_1$$

Si a diagonal MM_3 representa o caminho percorrido pelo movel no movimento resultante durante o tempo t, essa diagonal, na hypothese de t igual a unidade, representará a velocidade deste movimento, donde conclue-se que a velocidade do movimento resultante é representada em grandeza e direcção pela diagonal do parallelogrammo construido sobre as rectas que representam em grandeza e direcção as velocidades dos movimentos simultaneos componentes.

Finalmente resulta que sendo os espaços percorridos no movimento resultante: MM_1, M_1M_2, M_2M_3 proporcionaes aos espaços no mesmo tempo percorridos nos movimentos componentes, o movimento resultante é tambem uniforme.

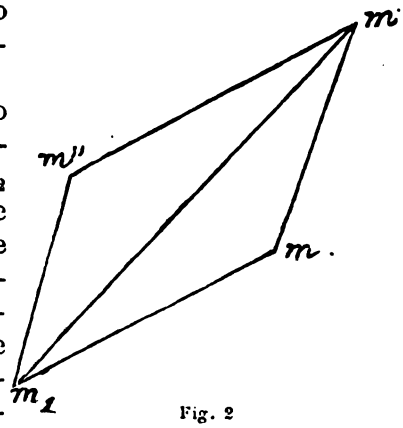


Fig. 2

Suppondo, pois, um ponto fig. (2) m sujeito a duas impulsões de velocidades v_1 e v_2 representadas em grandeza e direcção pelas rectas mm' e mm'', construindo o parallelogrammo $mm'\,m_1\,m''$, a diagonal mm_1 será a velocidade do movimento uniforme resultante, em grandeza e direcção. Designando por θ o angulo das velocidades componentes, por α o angulo de v_1 ou mm' com V ou mm_1, por β o

angulo de v_2 ou mm'' com V, teremos, entre os elementos da questão fundamental, as relações :

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\ v_1\ v_2\ cos\ \theta,\ \frac{v_1}{V} = \frac{sen\ \beta}{sen\ \theta},\ \frac{v_2}{V} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \theta}$$

e

$$sen\ \beta = \frac{v_1}{V}\ sen\ \theta,\ sen\alpha = \frac{v_2}{V}\ sen\ \theta.$$

Como sobre uma recta tomada para diagonal, é possivel construir-se uma infinidade de parallelogrammos, é claro que, dado um movimento uniforme de velocidade v, podemos determinar uma infinidade de movimentos uniformes capazes de combinados terem como resultante esse movimento considerado. Esta operação constitue a decomposição do movimento que, ao contrario da composição, é inteiramente indeterminada.

Representando, por exemplo, fig. (3) por mo uma velocidade conhecida de que se acha animado o ponto m, com a recta mo como diagonal poderemos construir os parallelogrammos $m\ a\ o\ r$, $m\ c\ o\ s$, $m\ e\ o\ n$, etc., em que os lados dous a dous (ma, mr), (mc, ms), (me, mn), etc., representarão as velocidades de que simultaneamente deve achar-se animado o ponto m, para ter como resultante a velocidade mo. Poderiamos levar ainda mais longe a operação decompondo a velocidade dada em duas outras e cada uma destas em outras, de sorte que assim chegariamos a formular a velocidade considerada como resultante da acção simultanea de muitas outras.

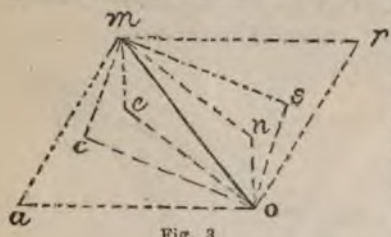


Fig. 3

O problema directo é, por conseguinte, sempre determinado, isto é, dado um conjuncto de impulsões simultaneas actuando sobre um ponto, esses movimentos teem sempre um

unico resultante equivalente; o problema inverso é essencialmente indeterminado, isto é, a uma impulsão dada corresponde uma infinidade de outras que a podem ter como resultante, de modo que essa impulsão póde ser decomposta em um numero qualquer de impulsões e segundo direcções pedidas.

A composição dos movimentos, apreciada segundo a lei de Galilêo, nos levando a formular a regra fundamental do parellelogrammo, nenhuma hypothese exigiu relativamente ao angulo formado pelas impulsões primitivas nem sobre o sentido das velocidades correspondentes; ora podendo esse angulo variar do *o* a 180° e as velocidades podendo ser nestes casos extremos no mesmo ou em sentidos contrarios, é indispensavel mostrarmos que semelhante questão acha-se comprehendida no theorema fundamental, apenas mascarado pela coincidencia dos elementos do parallelogrammo, nesses limites reduzido a uma mesma linha recta.

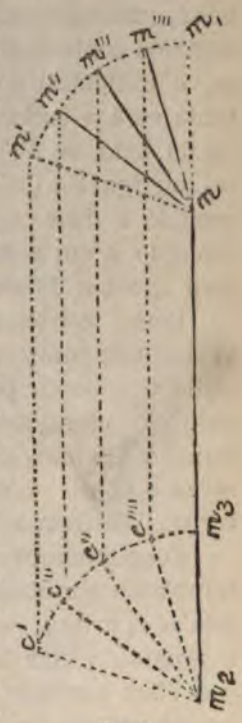


Fig. 4

Consideremos um ponto m submettido a duas impulsões simultaneas cujas velocidades em grandeza e direcção sejam representadas por $mm' = v_1$, e $mm_2 = v_2$ fig. (4), formando entre si um angulo m' mm_2. Segundo o theorema fundamental, no fim da unidade de tempo a posição do movel será c', extremo da diagonal do parallelogrammo m' mm_2 c'. Suppondo fixa a direcção da velocidade v_2, isto é, da recta mm_2 e variando a da velocidade v_1, ou mm' de modo a augmentar o angulo por ellas formado, quando a direcção de v_1 for mm'' o movel, no fim da unidade de tempo, se achará em c''; quando for mm''', a posição do movel no fim do mesmo tempo será

c''', quando for mm'''', a posição do movel será c'''', etc., como as diagonaes dos parallelogrammos construidos sobre a velocidades componentes representam em grandeza e direcçi a resultante destas velocidades, vê-se que, á proporção que angulo por ellas formado vai augmentando, a velocida resultante vai diminuindo, e a grandeza desta obtem- unindo o ponto m á extremidade c' do lado $m_2 c'$, paralle e igual á velocidade v_1 qualquer que seja a direcção desta.

Por conseguinte quando o angulo entre v_1 e v_2 for de 18C isto é, quando as impulsões actuarem na mesma direcção e e sentidos contrarios a recta mm' estará em mm_1, e o lac $m_2 c'$ coincidirá com $m_2 m_3$; nestas condições, a resu tante será a recta mm_3 que une o ponto m á extremidac m_3 do lado $m_1 c'$, recta igual á differença entre mm_2 e n m_2 ou igual a $(v_2 - v_1)$, isto é, quando um corpo for su mettido a duas impulsões simultaneas actuando na mesm direcção e em sentidos contrarios a velocidade resultan será igual a differença entre as velocidades componente

Como consequencia resulta que no caso de serem t velocidades componentes iguaes, a velocidade resultante se nulla e o ponto permanecerá em repouso, o que nos indicado claramente pela imagem geometrica, pois qu sendo então $mm_2 = m m' = m_2 c'$, quando $m_2 c'$ coincidir co $m_2 m$ o ponto m_3 coincidirá com o ponto m, de fórma qu a recta resultante mm_3 reduzir-se-ha ao ponto dado m.

Supponhamos agora o ponto m submettido a du impulsões simultaneas mm' e mm_2 fig. (5) de velocidad $mm' = v_1$ e $mm_2 = v_2$. Mantendo fixa a direcção de mm_2 ou e fazendo variar a de mm' de modo a diminuir o angu por ellas formado, quando a direcção de mm' for mm'' movel no fim da unidade de tempo se achará na posiçi c'', quando a direcção de v_1 for mm''', no fim do mesn tempo o movel estará em c''' e assim por diante. A r sultante representada pela recta que une o ponto m extremidade c' do lado $m_2 c'$ igual e parallelo á velocidade

irá augmentando á proporção que este lado approximar-se da coincidencia com a recta mm_2; quando se der esta coincidencia e, portanto, fôr nullo o angulo entre as velocidades componentes mm' e mm_2, o ponto c' coincidirá com m_3 e a resultante será mm_3 ou a somma de $mm_2 = v_2$ e $m_2 m_3 = v_1$, isto é, sendo um ponto sujeito a duas impulsões simultaneas dirigidas na mesma direcção e sentido, a velocidade resultante é igual á somma das velocidades componentes.

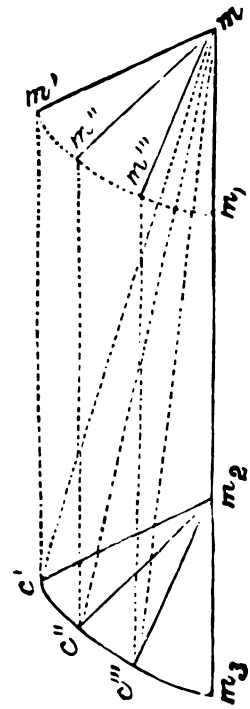


Fig. 5

Como consequencia resulta que si $v_1 = v_2$, a velocidade resultante é o dobro das velocidades componentes; si uma das velocidades componentes fôr o dobro da outra, a resultante será o triplo da velocidade commum, e assim por diante: todos estes resultados, como vamos ver, podem ser immediatamente obtidos pela applicação directa da lei de Gallêo.

Supponhamos um ponto m sujeito a duas impulsões simultaneas na mesma direcção em sentidos contrarios, e cujas velocidades sejam em grandeza e direcção representadas fig. (6) por $mm' = v_1$ e $mm_1 = v_2$. Conforme aquella lei o movimento do ponto effectua-se sob acção de cada impulsão

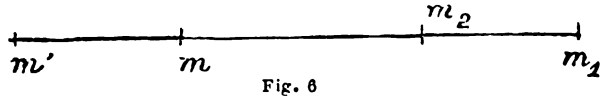


Fig. 6

como si a outra deixasse de agir; o facto, pois, passa-se como si o ponto m, em virtude da velocidade v_2, percorresse o espaço mm_1 ao mesmo tempo que a recta mm_1 animada da velocidade v_1 percorre o espaço mm'.

Si o ponto só se achasse animado da velocidade v_2 no fim da unidade de tempo a sua situação seria m_1, porém em virtude da velocidade v_1 no fim desse tempo o extremo m da recta mm_1 terá percorrido o espaço $m\,m'$ de modo que o outro extremo m_1 se achará afastado de sua posição de uma quantidade $m_1\,m_2$ igual a v_1; assim, pois, em virtude da acção simultanea das duas impulsões o movel, no fim da unidade de tempo, se achará na posição m_2, tendo percorrido um espaço, que representa sua velocidade resultante, igual a mm_2 ou a $(v_2 - v_1)$.

Consideremos agora o ponto dado m fig. (7), sujeito á impulsões representadas pelas velocidades $m\,m' = v_1$ e $m\,m_2 = v_2$ na mesma direcção e sentido.

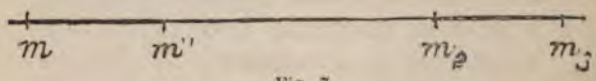


Fig. 7

Sómente sob a acção da impulsão v_2, no fim da unidade de tempo a situação do movel seria m_2, como, porém, existe uma outra impulsão, cujo effeito, conforme a lei geral, é independente do da primeira, em virtude desta ultima a recta $m\,m_2$ percorrerá, na unidade de tempo, o espaço $m\,m' = v_1$, de modo que no fim deste tempo o ponto m_2 se achará em m_3 tendo descripto uma recta $m_2\,m_3 = v_1$, e a situação do movel sera m_3, tendo assim percorrido, na unidade de tempo, um espaço $m\,m_3 = m\,m_2 + m_2\,m_3 = v_1 + v_2$.

Tudo isto póde ser algebricamente confirmado, pois fazendo-se successivamente na expressão de V, anteriormente estabelecida, as hypotheses: $\alpha = o$ e $\alpha = 180$ resulta:

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\,v_1\,v_2 = (v_1 + v_2)^2$$

ou

$$V = v_1 + v_2$$

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\,v_1\,v_2 = (v_1 - v_2)^2$$

ou

$$V = v_1 - v_2$$

o que traduz os resultados já obtidos.

Da consideração do caso em que os movimentos teem a mesma direcção e sentido, deriva-se, immediatamente, a relação entre as impulsões e as velocidades correspondentes.

Si um movel submettido a uma impulsão F_1 adquire uma velocidade v_1, se submettido a uma impulsão dupla $2F_1$ adquire uma velocidade $2v_1$, a uma impulsão tripla $3F_1$ uma velocidade $3v_1$ e assim por diante, é evidente que, representando-se por F_2 a impulsão $2F_1$, por F_3 a impulsão $3F_1$, por F_4 a impulsão $4F_1$ etc., e por v_2, v_3, v_4, etc., as velocidades a ellas relativas, teremos:

$$\frac{F_1}{v_1} = \frac{2F_1}{2v_1} = \frac{3F_1}{3v_1} = \text{etc.}$$

ou

$$\frac{F_1}{v_1} = \frac{F_2}{v_2} = \frac{F_3}{v_3} = \frac{F_4}{v_4} \text{ etc.}$$

isto é, as impulsões são directamente proporcionaes ás velocidades por ellas produzidas.

Si na relação

$$\frac{F_1}{v_1} = \frac{F_2}{v_2}$$

ou

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

tomarmos F_1 para unidade de força e v_2 para unidade de espaço teremos: $F_2 = v_2$. A impulsão, pois, é medida pela velocidade que produz; de sorte que serão iguaes todas as impulsões que imprimirem a um mesmo corpo a mesma velocidade; será dupla da outra uma impulsão que ao mesmo corpo imprimir uma velocidade dupla da desta outra, e assim por diante.

A estas conclusões ainda podemos chegar considerando a questão sob o ponto de vista estatico das impulsões com a mesma direcção, porém em sentido contrario.

Supponhamos um ponto m submettido a duas impulsões f e f_1 actuando na mesma direcção e sentidos contrarios com

as velocidades v_1 e v_2. Se o ponto m sob a acção simultanea dessas forças ficar em equilibrio, as forças serão equivalentes, isto é, $f = f_1$, pois que a acção de uma destróe a acção da outra; porém, neste caso, sendo a velocidade resultante nulla, conforme o principio já estabelecido, teremos $v_1 - v_2 = o$ ou $v_1 = v_2$.

A neutralisação das impulsões, pois, determina a igualdade das velocidades, o que mostra a equivalencia entre este modo de julgar e o anterior.

Sob o ponto de vista dynamico as forças são iguaes quando produzem velocidades iguaes em o mesmo corpo; sob o aspecto statico as velocidades são iguaes quando relativas ás impulsões simultaneas que se neutralisam, isto é, a impulsões iguaes.

Considerando o ponto m sujeito a duas impulsões iguaes a f e de velocidade v na mesma direcção e sentido, e simultaneamente a uma outra impulsão F da mesma direcção e sentido contrario com velocidade V, si sob a acção dessas tres forças o ponto se mantiver em equilibrio, a impulsão F neutralisará a acção da impulsão $2f$ e, por conseguinte, teremos que $F = 2f$; porém sendo, neste caso, a velocidade resultante nulla e esta, segundo o estudo anterior, igual á differença entre as velocidades componentes, resulta: $V - 2v = o$ ou $V = 2v$.

Por conseguinte, si das impulsões simultaneas que se neutralisam uma é igual ao dobro da outra, a velocidade da primeira será igual ao dobro da velocidade da segunda. Si uma das forças é o triplo, o quadruplo, o quintuplo, etc., da outra que a neutralisa, teremos respectivamente:

$$F = 3f,\ V = 3v,\ F = 4f,\ V = 4v,\ F = 5f,\ V = 5v, \text{ etc.}$$

d'onde:

$$\frac{F}{V} = \frac{f}{v} = \frac{f_1}{v_1} = \frac{f_2}{v_2}, \text{ etc.}$$

sendo v, v_1, v_2, etc., as velocidades relativas ás impulsões, f, f_1, etc.

As leis de Kepler e Galilêo constituem uma base inductiva sufficiente para a elaboração inicial da dynamica, emquanto as especulações sobre o movimento limitarem-se ás translações, casos em que os corpos são sempre reductiveis a um ponto; desde, porém, que procurarmos considerar a segunda parte do problema fundamental da mecanica, torna-se indispensavel uma terceira lei, concernente aos conflictos, e que então ahi prevalece sem todavia dispensar o recurso permanente das duas primeiras.

Esta lei, devida a Newton, consiste na *igualdade e opposição constantes entre a acção e a reacção, uma vez que ellas sejam convenientemente medidas.*

Obtida por inducção, principalmente baseada na apreciação do phenomeno do choque, ella póde ser considerada como um caso particular de uma outra universal, formulada por A. Comte, a qual consiste em que *ha sempre equivalencia entre a acção e a reacção, si suas intensidades são medidas conforme a natureza de cada conflicto.*

Sob esta fórma geral a lei póde ser verificada em todas as ordens de phenomenos, mesmo os mais complexos.

Nas sociedades, por exemplo, o codigo penal tem precisamente por objecto substituir as reacções individuaes, formulando do melhor modo a equivalencia necessaria entre a reacção social e as acções individuaes, entre as penas e os delictos commettidos; occasiões ha, porém, em que o conflicto é tão violento que a reacção manifesta-se immediatamente equivalente á acção: é o caso do lynchamento, tão sabiamente resumido pelo bom senso popular no adagio: *Quem com ferro fere, com ferro será ferido.*

A consideração da lei de Newton leva-nos a completar o estudo da comparação das impulsões tomando em consideração um elemento até aqui posto de parte, mas cuja influencia torna-se indispensavel apreciar desde que se passa a tratar da communicação mutua do movimento entre corpos reunidos por um determinado modo de ligação, esse elemento é a *massa*.

Segundo a lei de Galilêo, vimos que si impulsões actuam sobre corpos iguaes a sua avaliação póde ser feita mediante as velocidades por ellas produzidas; si, porém, deixarmos de considerar o mesmo corpo ou corpos iguaes para tratar de corpos differentes, a simples consideração da velocidade torna-se insufficiente, pois, como mostra a mais ligeira observação, corpos de massas desiguaes exigem forças differentes para imprimir-lhes a mesma velocidade.

Si tomarmos, por exemplo, uma pequena bala de chumbo e a atirarmos a uma certa distancia, desenvolveremos para isso um certo esforço muscular; si procurarmos lançar á mesma distancia uma outra bala muito maior, contendo portanto maior massa, o esforço muscular necessario torna-se maior, de modo que, considerados os dous movimentos independentemente do motor, suppondo iguaes os tempos gastos por um e outro movel, e tomando-o para unidade, si formos avaliar as forças que actuam sobre os dous corpos sómente pelas suas velocidades essas forças serão julgadas iguaes, quando realmente não são.

Esta influencia da *massa* manifesta-se e de um modo preciso nas experiencias relativas ao phenomeno do choque.

Tomando-se duas espheras iguaes m e m_1, perfeitamente duras e imprimindo-se-lhes velocidades iguaes na mesma direcção e sentidos contrarios, após o choque ellas ficam em repouso; mantendo as mesmas velocidades e augmentando a massa da esphera m, dado o conflicto, as duas movem-se no sentido do movimento da esphera cuja massa foi augmentada. Ora, si quando as massas eram iguaes as impulsões que animavam os dous moveis neutralisaram-se após o choque, si augmentando a massa de uma dellas, após o conflicto, esta arrastou a outra, é claro, visto a constancia da velocidade, que o augmento da massa determinou accrescimo na energia da força de que se achava animado o corpo correspondente. Suppondo a esphera m de menor diametro que m_1, diminuindo portanto sua massa, e mantendo ainda a

mesma velocidade, após o choque as duas espheras movem-se no sentido do movimento da esphera m_1 de maior massa; ora, si quando as massas eram iguaes as duas impulsões neutralisavam-se e depois da diminuição da massa da esphera m esta é arrastada pela esphera m_1, conclue-se que a diminuição da massa na esphera m determina uma diminuição na energia da força que a animava.

Os mesmos resultados teremos si mantivermos as massas as mesmas e fizermos variar a velocidade da esphera m.

Destas experiencias resulta que dous elementos concorrem para julgar-se da energia de uma força: a *velocidade* e a *massa*, e de modo tal que mantendo uma dellas constante essa energia cresce ou decresce quando cresce ou decresce o outro elemento.

Suppondo, pois, forças iguaes actuando sobre dous corpos e imprimindo-lhes iguaes velocidades, conclue-se que os corpos teem a mesma massa.

A consideração da massa referida ao espaço leva-nos a ahi conceber o ponto não mais como em geometria, abstrahindo de suas dimensões para só utilisal-o nas determinações de situação, porém como constituido de massas elementares que por sua aggregação formam as massas dos corpos.

De repetidas experiencias, sobretudo relativas ao choque, chegou-se a estabelecer o principio que as impulsões, do mesmo modo que para com as velocidades, são proporcionaes ás massas, principio que póde ser abstractamente interpretado.

Consideremos um ponto de massa m sujeito á impulsão f e animado de uma velocidade v; suppondo um outro ponto da mesma massa reunido ao primeiro, a massa do conjuncto será $2m$; si este conjuncto continuar sujeito sómente á acção da força f a velocidade anterior v modifica-se, como mostra a experiencia; concebendo, porém, uma outra força f igual á primeira e imprimindo ao segundo ponto a mesma

velocidade v, parallela á primeira e no mesmo sentido, o systema mover-se-ha com a velocidade v, porém devida á acção de uma força $2f$.

Por conseguinte para manter a mesma velocidade duplicando a massa foi preciso conceber duplicada a força, de modo que si dous corpos movem-se com a mesma velocidade e o primeiro tem a massa dupla da do segundo conclue-se que a impulsão do primeiro é dupla da impulsão do segundo.

Juntando aos dous pontos um terceiro da mesma massa m, a massa do corpo será $3m$, e si este continúa sómente sob a acção da impulsão $2f$ a velocidade v modifica-se ; si, porém, imaginarmos uma outra impulsão f, igual e parallela ás duas primeiras, actuando sob o terceiro ponto, o corpo se deslocará com a mesma velocidade v, resultante porém da acção da impulsão $3f$, de modo que para manter ao corpo $3m$ a velocidade anterior v, torna-se necessario triplicar a força. E assim por diante.

Consideremos agora dous corpos, um composto de n pontos de massa m e o outro de n' pontos tambem de massa m; as massas dos dous corpos serão :

$$M = nm, \quad M' = n'm \tag{1}$$

Supponhamos que uma impulsão F imprime a M uma velocidade v e uma impulsão F' imprime a M' uma velocidade v', e que representando por v_0 a unidade de espaço e h e k numeros inteiros, tenhamos :

$$v = h\, v_0 \quad v' = k\, v_0 \tag{2}$$

Considerando a força F composta de n forças iguaes a f, sendo f capaz de imprimir a um ponto de massa m uma velocidade v, teremos :

$$F = n\, f \tag{3}$$

Suppondo-se cada um dos n pontos do corpo M movendo-se sob a acção de uma impulsão f, actuando parallelamente e

no mesmo sentido da força F, o movimento de M sob a acção dessas n forças será o mesmo que sob a acção da força F.

Seja f' uma impulsão que imprima ao ponto de massa m uma velocidade igual a v_0 ao mesmo tempo que f lhe imprime uma velocidade v. Sendo o ponto o mesmo, segundo a lei de Galilêo, estas duas forças são proporcionaes ás velocidades,

d'onde:

$$\frac{f}{f'} = \frac{v}{v_0}$$

porém :

$$v = h\, v_0$$

d'onde :

$$f = h\, f'$$

Substituindo este valor na relação (3), resulta ·

$$F = n\, h\, f'$$

Porém as expresssões (2) e (1) dão :

$$h = \frac{v}{v_0}, \quad n = \frac{M}{m}$$

d'onde :

$$\frac{F}{f'} = \frac{M}{m} \cdot \frac{v}{v_0}$$

Tomando a massa m para unidade de massa, a força f' para unidade de força, isto é, tomando para unidade de força a força que imprime á unidade de massa uma velocidade v_0 igual á unidade de espaço, resulta :

$$F = Mv.$$

Assim, pois, as impulsões medem-se pelo producto da massa pela velocidade; a este producto denomina-se *quantidade de movimento*.

Considerando do mesmo modo a força F' composta de n' forças f', capazes de actuando sobre o ponto m imprimir-lhe uma velocidade v', e seguindo a mesma marcha anterior, teremos :

$$F' = M' v'$$

d'onde:

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mv}{M'v'}$$

isto é, as impulsões são proporcionaes aos productos das massas pelas velocidades correspondentes, ou as quantidades de movimento por ellas produzidas.

Formulada a maneira de avaliar as forças, vamos agora apreciar a theoria mathematica da communicação dos movimentos nos casos mais simples, nos quaes a verdade do principio newtoniano apparece de um modo admiravel.

ESTUDO DO CHOQUE

Nesta questão consideraremos tres casos: os dous casos extremos em que os corpos são perfeitamente duros ou perfeitamente elasticos e o caso intermediario de uma elasticidade imperfeita.

Supponhamos, pois, dous corpos A_1 e A_2 perfeitamente duros, de massa m_1 e m_2 animados das velocidades v_1 e v_2, na mesma direcção e sentido, sendo v_1 maior que v_2.

Dado o choque, desenvolve-se no ponto de contacto, por parte de A_1 uma acção sobre A_2, tendendo a augmentar sua velocidade, e por parte de A_2 sobre A_1, uma reacção igual e contraria tendendo a diminuir a velocidade v_1.

Este conflicto mantem-se até que augmentando a velocidade v_2 e diminuindo v_1 as duas tornam-se iguaes e então os dous corpos mover-se-hão juntos com uma velocidade commum V.

Em taes condições o corpo A_1 terá perdido de sua velocidade uma quantidade igual a $(v_1 - V)$ e o corpo A_2 terá ganho uma quantidade igual a $(V - v_2)$; a impulsão relativa ao primeiro terá perdido de energia a quantidade $m_1 (v_1 - V)$ e a impulsão relativa ao segundo terá ganho a quantidade $m_2 (V - v_2)$.

Em virtude da lei de Newton, temos:

$$m_1 (v_1 - V) = m_2 (V - v_2)$$

d'onde:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

formula que nos dá a velocidade commum depois do choque.

Si o corpo A_2 está em repouso temos $v_2 = o$, d'onde:

$$V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Si, além disto, a massa m_2 é infinitamente grande, teremos:

$$V = o$$

isto é, o corpo A_1, depois do choque, ficará em repouso.

Suppondo a velocidade v_2 negativa, isto é, suppondo os corpos movendo-se em sentidos contrarios, resulta :

$$V = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Considerando neste caso as massas iguaes e iguaes as velocidades, teremos :

$$V = o$$

isto é, dous corpos animados da mesma velocidade, tendo a mesma massa, chocando-se segundo uma mesma direcção e em sentidos contrarios ficam em repouso.

Passemos ao segundo caso extremo.

Si os corpos A_1 e A_2 são perfeitamente elasticos, a apreciação do phenomeno fica reduzida a considerações identicas ás do caso anterior, considerando-se o choque constituido por dous periodos: no primeiro o corpo A_1 actua sobre A_2 deformando-o em consequencia da elasticidade, e tendendo a augmentar sua velocidade v_2; o corpo A_2 reage contra A_1, tambem deformando-o e tendendo a diminuir sua velocidade v_1, isto até que A_1 tendo perdido uma parte da quantidade de movimento igual a $m_1 (v_1 - V)$ e A_2 uma parte igual a $m_2 (V - v_2)$, os dous adquirem uma velocidade commum:

$$V = \frac{m_1 v_2 + m_1 v_2}{m_1 + m_2}$$

Passado este instante não exercendo mais acção nenhuma um corpo sobre o outro, e a deformação mutua tendo attingido o seu limite, voltam os corpos a fórma primitiva em virtude da elasticidade, que então desenvolve reacções equivalentes á resistencia da compressão do primeiro periodo, restituindo assim, em sentidos contrarios, uma velocidade igual á perdida no primeiro periodo.

Nesta segunda phase, inteiramente devida á acção da elasticidade, o corpo A_1 perderá, pois, mais uma parte de sua velocidade igual a $(v_1 - V)$ e o corpo A_2 adquirirá mais uma parte igual a $(V - v_2)$, de sorte que a velocidade final do primeiro será:

$$v_1 - 2 (v_1 - V) = 2 V - v_1 = v' .$$

e a do segundo:

$$v_2 + 2 (V - v_2) = 2 V - v_2 = v''$$

Substituindo V por seu valor, resulta:

$$(a') \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad v'' = \frac{m_2 v_2 + m_1 (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Para obtermos as formulas no caso em que os dous corpos movem-se em sentidos contrarios, basta substituir v_2 por $-v_2$ o que dá :

$$v' = \frac{m_1 v_1 - m_2 (2v_2 + v_1)}{m_1 + m_2}, \quad v'' = \frac{m_1 (2v_1 + v_2) - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

(a) Suppondo as massas iguaes e o corpo A_2 em repouso, isto é,

$$m_1 = m_2 \text{ e } v_2 = 0,$$

resulta :

$$v' = 0, \quad v'' = v_1$$

o que indica que o corpo que choca fica em repouso e o que estava em repouso adquire uma velocidade igual áquella com que foi chocado.

Considerando A_2 em repouso e m_1 differente de m_2 temos :

$$v' = \frac{v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad v'' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

ou :

$$v' = \frac{v_1 \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad v'' = \frac{\frac{m_1}{m_2} 2v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

Si neste caso suppuzermos m_2 extraordinariamente grande em relação a m_1, estes dous valores darão successivamente:

$$v' = -v_1, \quad v'' = 0,$$

isto é, quando m_2 puder ser considerado infinitamente grande, a velocidade do corpo que produz o choque lhe será restituida em sentido contrario ; é o caso na pratica observado de uma bola elastica atirada normalmente a um paredão.

Consideremos, finalmente, a hypothese em que as massas são as mesmas, as formulas (a) não dão :

$$v'' = v_1 \quad v' = -v_2$$

o que nos mostra que os corpos trocam as velocidades.

Si o corpo A_2 está, além disso, em repouso ou si $v_2 = 0$ resulta :

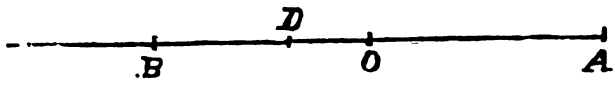
$$v'' = v_1 \ , \quad v' = 0$$

isto é, o corpo movel A_1 fica em repouso e o outro A_2 move-se com a velocidade v_1 do primeiro —.

Esta troca de velocidades entre os corpos elasticos da mesma massa foi apresentada por Huyghens de uma maneira muito curiosa, para que a deixemos de citar.

Elle admittia como principio experimental que dous corpos elasticos iguaes, animados da mesma velocidade, na mesma direcção e sentidos contrarios, chocando-se reflectem-se com a velocidade commum.

Isto estabelecido, supponhamos um individuo em uma embarcação, tendo em cada uma das mãos um fio em cujas extremidades estão suspensos dous corpos iguaes A e B, e



que ao mesmo tempo que a embarcação move-se com uma velocidade uniforme v de A para B, elle approxima os dous corpos com uma mesma velocidade v_1.

Si a embarcação estivesse immovel, para um observador collocado no terreno, o choque teria logar no meio da distancia AB ; porém para esse observador o corpo A animado de duas velocidades, uma v a do navio, outra v_1 devido á impulsão, ambas no mesmo sentido, terá, antes do choque, uma velocidade $(v_1 + v)$, conforme a lei de Galilêo ; e o corpo

B animado de duas velocidades v e v_1 em sentidos contrarios, apresentará antes do conflicto uma velocidade $(v_1 - v)$. Representando por OD a velocidade v, sendo

$$Ao = v_1 = BO$$

temos que

$$BD = v_1 - v \text{ e } AD = v_1 + v.$$

Para o observador, pois, o choque dá-se no ponto D, no fim da unidade de tempo.

Como os corpos são iguaes e estão animados da mesma velocidade v_1 para quem se acha na embarcação, segundo o principio base, após o conflicto elles reflectem-se com a velocidade v_1 commum, o corpo A movendo-se no sentido DA e o corpo B no sentido DB.

Para o observador, após o choque em D, tendo a embarcação percorrido um espaço v e movendo-se o corpo A de D para A com velocidade v_1, este corpo se achará animado de duas velocidades em sentidos contrarios v, e v_1 e portanto da velocidade $(v_1 - v)$ que é a velocidade de que se achava animado B antes do choque; e o corpo B, após o choque, movendo-se com velocidade v_1 de D para B e o navio movendo-se com velocidade v no mesmo sentido, terá para o observador uma velocidade $(v_1 + v,)$, pois que as duas de que se acha animado são no mesmo sentido; isto é, o corpo B mover-se-ha com a velocidade de que se achava animado A antes do choque.

O observador, pois, verificará, que após o conflicto, trocaram-se as velocidades dos dous corpos.

Consideremos o caso em que os corpos não são perfeitamente elasticos.

Apreciando o grão de elasticidade pela quantidade e da velocidade que ao corpo é restituida em sentido contrario si chocar um plano immovel perfeitamente duro, temos que no segundo periodo do conflicto a reacção da elasticidade dimi-

Applicando, pois, a formula obtida para este caso :

$$v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

temos, substituindo v_1 por $a \cos \alpha$:

$$v' = \frac{m_1 a \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$

Designando por V_1 a velocidade final e sendo esta a resultante de v' e $a \operatorname{sen} \alpha$, perpendiculares entre si, teremos :

$$V_1^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{m_1^2 a^2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2)^2}$$

3.º — n *espheras de elasticidade commum* e *e massas* $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$, *acham-se dispostas em linha recta ; a primeira choca a segunda com uma velocidade* a, *pede-se a velocidade adquirida pela ultima esphera.*

A formula geral para a velocidade final da segunda esphera é :

$$v'' = \frac{m_1 a + m_2 a'}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 e (a - a')}{m_1 + m_2}$$

para este caso em que $a' = 0$, pois a segunda esphera é supposta em repouso, reduz-se a :

$$v = \frac{m_1 a (1 + e)}{m_1 + m_2}$$

A segunda esphera, pois, em consequencia do choque da primeira, adquirirá a velocidade:

$$V_2 = \frac{m_1 a (1 + e)}{m_1 + m_2}$$

e com esta velocidade chocará a terceira, cuja velocidade será :

$$V_3 = \frac{m_2 V_2 (1 + e)}{m_2 + m_3} = \frac{m_1 m_2 a (1 + e)^2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}$$

Com esta velocidade a terceira chocará a quarta, cuja velocidade será :

$$V_4 = \frac{m_3\ V_3\ (1+e)}{m_3 + m_4} = \frac{m_1\ m_2\ m_3\ a\ (1+e)^3}{(m_1+m_2)\ (m_2+m_3)\ (m_3+m_4)}$$

e assim por diante ; a velocidade da esphera n, será :

$$V_n = \frac{m_{n-1}\ V_{n-1}\ (1+e)}{m_{n-1} + m_n} =$$

$$= (1+e)^{n-1}\ \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{m_2}{m_2+m_3} \cdot \frac{m_3}{m_3+m_4} \cdots\cdots \frac{a\ m_{n-1}}{m_{n-1} + m_n}.$$

4.º — n *espheras perfeitamente elasticas de massas* m_1, m_2, m_3, ... m_n *acham-se collocadas em linha recta entre duas outras de massas* m *e* m' *; a primeira choca a segunda com uma velocidade* v *; determinar quaes devem ser as massas das espheras intermediarias para que a velocidade* v' *communicada á ultima esphera* m' *seja um maximum, e o limite para o qual converge essa velocidade maximum quando o numero de espheras cresce indefinidamente.*

Considerando as tres primeiras espheras m, m_1 e m_2 a formula geral deduzida no problema anterior nos dá, para velocidade adquirida pela terceira esphera, fazendo $n = 3$ e $e = 1$:

$$v_3 = \frac{4\ m\ m_1\ v}{(m+m_1)\ (m_1+m_2)} = \frac{4\ m\ v}{\left(\frac{m}{m_1}+1\right)\left(m_1+m_2\right)}$$

Determinando o minimo do denominador teremos o maximum de v_3. Differenciando e igualando a zero este denominador, sendo a differenciação em relação a m_1, resulta :

$$-\frac{m}{m_1^2}\left(m_1+m_2\right) + \frac{m}{m_1} + 1 = 0$$

d'onde :

$$m_1^2 = m\, m_2$$

Suppondo, pois, tres espheras, para que a velocidade da terceira seja *maximum* a massa da esphera intermediaria deve ser média geometrica entre as massas das que lhe são adjacentes.

Consideremos as quatro espheras m, m_1, m_2 e m_3, a formula geral nos dá para velocidade da quarta esphera m_3:

$$v_4 = \frac{8\, m\, m_1\, m_2\, v}{(m + m_1)(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} =$$

$$= \frac{8\, m\, v}{\left(\frac{m}{m_1} + 1\right)\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)\left(m_2 + m_3\right)}$$

Para ter o maximum de v_4, basta-nos determinar o minimum do denominador.

Differenciando este em relação a m_2 e igualando a derivada a zero, resulta :

$$-\left(\frac{m}{m_1} + 1\right)\left(m_2 + m_3\right)\frac{m_1}{m_2^2} +$$

$$+\left(\frac{m}{m_1} + 1\right)\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) = 0$$

d'onde :

$$-\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1\, m_3}{m_2^2} + \frac{m_1}{m_2} + 1 = 0$$

ou

$$m_2^2 = m_1\, m_2$$

Para que, pois, a velocidade da 4ª esphera seja maximum, a sua massa deve ser uma média geometrica entre as duas massas adjacentes.

Continuando do mesmo modo teriamos para velocidade da esphera $n + 2$ ou m' :

$$v_{n+2} = v' =$$

$$= \frac{2^{n+1} m\, m_1\, m_2 \ldots m_n\, m_{n+1}\, v}{(m + m_1)(m_1 + m_2) \ldots\ldots (m_n + m_{n+1})(m_{n+1} + m_{n+2})}$$

ou :

$$v' = \frac{2^{n+1} m\, v}{\left(\frac{m}{m_1} + 1\right)\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \ldots\ldots \left(\frac{m_n}{m_{n+1}} + 1\right)\left(m_{n+1} + m_{n+2}\right)}$$

Para termos o maximum de v' basta-nos obter o minimum do denominador, differenciando este em relação a m_{n+1} e igualando a derivada a *zero*, resulta :

$$-\left(\frac{m}{m_1} + 1\right)\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \ldots\ldots \left(m_{n+1} + m_{n+2}\right)\frac{m_n}{m^2_{n+1}} +$$

$$+\left(\frac{m}{m_1} + 1\right)\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \ldots\ldots \left(\frac{m_n}{m_{n+1}} + 1\right) = 0$$

d'onde :

$$m^2_{n+1} = m_n \cdot m'$$

Por conseguinte para que a velocidade v' da ultima esphera seja um maximum, é necessario que a massa de cada uma das espheras intermediarias seja média geometrica entre as massas das duas espheras que lhe são adjacentes.

Vejamos agora a segunda parte da questão proposta.

Para as tres primeiras espheras m, m_1 e m_2, temos:

$$m_1^2 = m\, m_2$$

ou:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{m}{m_2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{m}{m_1}$$

Para as espheras, m_1, m_2 e m_3, temos :

$$m_2^2 = m_1 \, m_3$$

Substituindo m_1 por seu valor

$$(m \, m_2)^{\frac{1}{2}},$$

resulta:

$$m_2^4 = m \, m_2 \, m_3^2$$

ou :

$$\frac{m_2}{m_3} = \left(\frac{m}{m_3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Porém as relações :

$$m_1^2 = m \, m_2 \, , \; m_2^2 = m_1 \, m_3 \, , \; m_3^2 = m_2 \, m_4 \; etc. \qquad (I)$$

nos dão:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_3} = \frac{m_3}{m_4} = etc.$$

donde :

$$\frac{m}{m_1} = \left(\frac{m}{m_3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Para as espheras m, m_1, m_2, m_3 e m_4, teriamos:

$$m_3^2 = m_2 \cdot m_4$$

Substituindo-se m_2 por seu valor

$$(m_1 \, m_3)^{\frac{1}{2}}$$

temos :

$$m_3^2 = (m_1 \, m_3)^{\frac{1}{2}} \, m_4$$

Substituindo m_1 por seu valor,

$$(m \, m_2)^{\frac{1}{2}},$$

ulta :

$$m_3^4 = (m\, m_2)^{\frac{1}{2}}\, m_3\, m_4^2$$

Elevando ao quadrado:

$$m_3^8 = m\, m_2\, m_3^2\, m_4^4$$

:

$$m_3^6 = m\, m_2\, m_4\, m_4^3.$$

Substituindo-se $m_2\, m_4$ por seu valor m_3^2, temos :

$$m_3^4 = m\, m_4^3$$

:

$$\frac{m_3}{m_4} = \left(\frac{m}{m_4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

endendo ás relações (1), resulta:

$$\frac{m}{m_1} = \left(\frac{m}{m_4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

assim por diante.

Sendo o indice da raiz em cada caso igual ao numero e espheras intermediarias entre a primeira m e a ultima as consideradas, augmentado de uma unidade, segue-se e para as tres ultimas espheras m_n, m_{n+1} e m_{n+2}, sendo o numero de espheras intermediarias, entre a primeira m a ultima m_{n+2} ou m', teremos:

$$\frac{m}{m_1} = \left(\frac{m}{m_{n+2}}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{m}{m'}\right)^{\frac{1}{n+1}} \qquad (2)$$

Sendo, como vimos, a velocidade da ultima esp

$$v' = \frac{2^{n+1}\, m\, v}{\left(\frac{m}{m_1}+1\right)\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)\cdots\cdots\left(\frac{m_n}{m_{n+1}}+1\right)\left(m_{n+1}\right.}$$

Como

$$m_{n+2} = m'$$

temos dividindo por m':

$$v' = \frac{2^{n+1}\,\frac{m}{m'}\,v}{\left(\frac{m}{m_1}+1\right)\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)\cdots\cdots\left(\frac{m_n}{m_{n+1}}+1\right)\left(\frac{m_{n+1}}{m^1}\right.}$$

ou:

$$v' = \frac{2^{n+1}\,\frac{m}{m^1}\,v}{\left(\frac{m}{m_1}+1\right)^{n+1}}$$

segundo as relações (1), ou:

$$\left[\frac{v'}{v}\right]^{\frac{1}{n+1}} = \frac{2\left(\frac{m}{m^1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{m}{m_1}+1}$$

Attendendo á relação (2), temos:

$$\left[\frac{v'}{v}\right]^{\frac{1}{n+1}} = \frac{2\left(\frac{m}{m^1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left(\frac{m}{m^1}\right)^{\frac{1}{n+1}}+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{\left(\frac{m}{m^1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}}$$

ou :

$$\frac{v'}{v} = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m'}\right)^{-\frac{1}{n+1}}\right]^{-(n+1)}$$

sendo :

$$\left(\frac{m}{m'}\right)^{-\frac{1}{n+1}} = e^{-\frac{1}{n+1} l. \frac{m}{m'}} = 1 - \frac{1}{n+1} l. \frac{m}{m'} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} l. \frac{m}{m'}\right)^2 - etc.$$

ulta, limitando-nos aos dous primeiros termos, e substi-
ndo o valor na expressão (3) :

$$\frac{v'}{v} = \left[1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} l. \frac{m}{m'}\right]^{-(n+1)}$$

nde :

$$lim \frac{v'}{v} = lim \left[1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} l. \frac{m}{m'}\right]^{-(n+1)}$$

Desenvolvendo a potencia, temos :

$$\left[1 - \frac{1}{n+1} \frac{1}{2} l. \frac{m}{m'}\right]^{-(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} l. \frac{m}{m'} +$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)^2}\left(\frac{1}{2} \cdot l. \frac{m}{m'}\right)^2 +$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\,2.\,3\,(n+1)^3}\left(\frac{1}{2} \cdot l. \frac{m}{m'}\right)^3 +$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\,2.\,3.\,4\,(n+1)^4}\left(\frac{1}{2} l. \frac{m}{m'}\right)^4 + etc =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} l. \frac{m}{m'} + \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} l. \frac{m}{m'}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{1.\,2.\,3}\left(\frac{1}{2} l. \frac{m}{m'}\right)^3 + etc$$

Suppondo n crescendo indefinidamente, temos:

$$l.\left[1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\,l.\,\frac{m}{m'}\right]=1+\frac{1}{2}\,l.\,\frac{m}{m'}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}l.\,\frac{m}{m'}\right)^2\frac{1}{2.\,3}\left(\frac{1}{2}\,l.\,\frac{m}{m'}\right)^3+etc$$

ou:

$$lim\left[1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\,l.\,\frac{m}{m'}\right]e^{\frac{1}{2}\,l.\,\frac{m}{m'}}=\sqrt{\frac{m}{m'}}$$

Teremos, pois:

$$lim\,\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{m}{m'}}$$

6.º — *Uma esphera perfeitamente elastica choca plano fixo e perfeitamente liso com uma velocidade* v, *um angulo de incidencia* α, *determinar em grande direcção a velocidade depois do choque.*

Representemos por v' a velocidade final e por β o an de reflexão.

Decompondo a velocidade v segundo a normal e a li de intersecção do plano considerado, com o plano da nor e da recta que representa a velocidade v, a impulsão fi decomposta em duas outras uma normal ao plano i a v *sen* α e outra segundo esse plano, igual a v *cos* α.

Não havendo attrito, esta componente não é alter mantendo-se assim como uma das componentes da vel dade final v'; quanto á componente normal, o phenom realisa-se como si a esphera chocasse o plano dire mente segundo essa linha com uma velocidade v *sen* α como vimos, neste caso o corpo será reflectido com a me velocidade, de modo que, tomada em sentido contrari negativo, a componente v *sen* α será tambem a compon da velocidade final v'.

Teremos pois, que $v = v'$, e como :

$$v \operatorname{sen} \alpha = v' \operatorname{sen} \beta \,, \quad v \cos \alpha = v' \cos \beta$$

temos :

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \,, \; tg\, \alpha = tg\, \beta \,, \quad \alpha = \beta.$$

o choque, pois, não modifica a velocidade, e o angulo de incidencia é igual ao angulo de reflexão.

6.º — *Uma esphera* m_1 *de elasticidade* e *choca uma outra igual* m_2 *movendo-se em sentido contrario com uma velocidade* v_2*; determinar a velocidade com que* m_1 *deve chocar* m_2 *para que após o conflicto* m_1 *fique em repouso.*

A fórmula geral (c) nos dá para este caso, fazendo v_2 negativo :

$$o = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 e (v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}$$

ou

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 - m_2 v_1 e - m_2 v_2 e = o$$

donde, por ser $m_1 = m_2$

$$v_1 = \frac{1 + e}{1 - e} v_2$$

7.º — *Determinar as velocidades* v_1 *e* v_2 *que devem ter duas espheras* m_1 *e* m_2 *de elasticidade e para que chocando-se na mesma direcção, a primeira fique em repouso e a segunda continue a mover-se com uma velocidade dada* a.

Nas equações (c) que nos dão as velocidades finaes das espheras, neste caso, fazendo $v' = o$ e $v'' = a$, teremos as duas equações, que nos permittirão determinar v_1 e v_2:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 e v_1 + m_2 e v_2 = o.$$

$$a (m_1 + m_2) = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 e v_1 - m_1 e v_2 .$$

Tirando da primeira o valor de v_2 e substituindo na segunda depois de ordenal-as em relação a v_1 e v_2, resulta:

$$v_1 = \frac{a\,(m_2 + em_2)}{em_1 + em_2}$$

Substituindo este valor na primeira:

$$v_2 = \frac{(em_2 - m_1)\,a}{em_1 + em_2}$$

8.º — *Uma esphera* m_1 *choca com uma velocidade* v_1 *uma outra* m_2 *em repouso; dado o conflicto a primeira deve ficar parada e a segunda deve mover-se com uma velocidade igual a* $\frac{1}{n}$ *da velocidade* v_1, *pede-se a elasticidade e commum aos dous moveis e a relação* $\frac{m_2}{m_1}$ *entre as duas massas.*

As equações geraes para este problema são as mesmas que as do precedente, attendendo-se que a velocidade v' neste caso deve ser nulla, a velocidade v'' igual a $\frac{v_1}{n}$ e que $v_2 = o$, as equações geraes (c) nos dão as relações:

$$m_1\,v_1 - m_2\,ev_1 = o\,,\quad \frac{v_1}{n} = \frac{m_1\,v_1 + m_1\,ev_1}{m_1 + m_2}$$

A primeira nos dá:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{e}\,,$$

e a segunda:

$$\frac{1}{n} = \frac{(1 + e)}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{1 + e}{1 + \frac{1}{e}} = e$$

donde

$$e = \frac{1}{n}$$

9.º — *Duas espheras perfeitamente elasticas* m_1 *e* m_2, *movem-se na mesma direcção e sentidos contrarios, com uma velocidade commum* v_1; *determinar qual a relação que deve existir entre as suas massas para que dado o choque uma dellas fique em repouso.*

Fazendo em uma das equações geraes (a), na 1ª por exemplo, a velocidade final por ella representada nulla, e as velocidades antes do choque iguaes, isto é, $v_1 = v_2$, resulta :

$$v_1 (m_1 - m_2) - 2m_2 v_1 = o \quad \text{ou} \quad m_1 = 3m_2, \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}.$$

10. — n *espheras duras e iguaes a* m *acham-se em contacto em linha recta e entre si ligadas, duas a duas, por fios inextensiveis iguaes a* s; *afasta-se bruscamente a primeira imprimindo-lhe uma velocidade* v_1 *segundo a linha dos centros e pede-se o tempo necessario para que a ultima esphera comece a mover-se.*

Sendo a velocidade da 1ª esphera v_1 e o seu movimento sendo uniforme, temos:

$$s = v_1 t_1 , \qquad \text{d'onde:} \qquad t_1 = \frac{s}{v_1}$$

t_1 representa assim o tempo gasto pela 1ª esphera em percorrer o espaço s ou em estender o fio, e pôr a segunda esphera em movimento. Esta achando-se em repouso a sua velocidade, em virtude da impulsão, será dada pela formula geral, propria a este caso :

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Sendo, porém, as espheras da mesma massa m, esta formula para a questão proposta reduz-se a :

$$v_2 = \frac{mv_1}{2m} = \frac{v_1}{2}$$

Designando por t_2 o tempo gasto por esta esphera, animada da velocidade uniforme $\frac{v_1}{2}$, em percorrer o espaço s, temos :

$$s = \frac{v_1}{2} t_2 \qquad \text{d'onde:} \qquad t_2 = \frac{2s}{v_1}$$

E' este o tempo empregado pela segunda esphera para tender o fio s que a liga com a terceira, e pôr esta em movimento.

Nestas condições a terceira esphera recebe a acção de uma massa composta das massas das duas primeiras, ou $2m$, animada de uma velocidade $\frac{v_1}{2}$.

Substituindo, pois, na formula geral a massa m_1 por $2m$, m_2 por m, por serem as espheras iguaes, e v_1 por $\frac{v_1}{2}$, a velocidade da terceira esphera será :

$$v_3 = \frac{2m\ v_1}{6m} = \frac{v_1}{3}$$

Com esta velocidade uniforme, o tempo t_3 gasto pela terceira esphera em percorrer o espaço s ou tender o fio que a liga com a quarta, e pôr esta em movimento, será dado pela formula :

$$s = \frac{v_1}{3}\ t_3 \qquad \text{d'onde :} \qquad t_3 = \frac{3s}{v_1}$$

Fazendo raciocinio analogo para com a quarta esphera, a sua velocidade obtem-se substituindo na formula geral a massa m_1 pela somma das massas das tres primeiras espheras ou $3m$, m_2 por m e v_1 por $\frac{v_1}{3}$, do que resulta

$$v_4 = \frac{3m\ v_1}{4.3\ m} = \frac{v_1}{4}$$

O tempo gasto por esta esphera para pôr a quinta em movimento será dado pela equação :

$$s = \frac{v_1}{4}\ t_4$$

d'onde

$$t_4 = \frac{4s}{v_1}$$

Comparando estes resultados conclue-se que o tempo gasto pela penultima esphera ou a esphera $(n - 1)$ para percorrer o espaço s ou tender o fio que a liga com a ultima e pôr esta em movimento, é dado pela formula :

$$t_{n-1} = \frac{(n-1)\ s}{v_1}$$

Por conseguinte o tempo total decorrido desde que a primeira esphera começou a mover-se até que a ultima entrou em movimento, será :

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_{n-1}$$

d'onde :

$$t = \frac{s}{v_1} + \frac{2s}{v_1} + \frac{3s}{v_1} + \dots + \frac{(n-1)\,s}{v_1}$$

ou :

$$t = \left[1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) \right] \frac{s}{v_1}$$

d'onde :

$$t = \frac{n\,(n-1)}{2} \cdot \frac{s}{v_1}$$

11. — *Supponhamos* n *espheras perfeitamente elasticas, iguaes, em linha recta, separadas duas a duas, por um mesmo espaço* s, *e que se imprime á primeira uma velocidade* v_1 *; pede-se o tempo decorrido para que a ultima entre em movimento.*

Sendo uniforme a velocidade v_1 o tempo gasto pela esphera movel para chocar a segunda será dado pela equação :

$$t_1 = \frac{s}{v_1}$$

Dado o conflicto, as velocidades das duas espheras são fornecidas pelas formulas geraes (a'), as quaes, fazendo, conforme os dados, $v_2 = o$, $m_1 = m_2$, reduzem-se a:

$$v' = o \quad , \quad v'' = v_1$$

Assim, depois do choque a primeira esphera fica parada e a segunda move-se com uma velocidade v_1, e com ella percorre o espaço s que a separa da terceira. O tempo empregado neste trajecto será:

$$t_2 = \frac{s}{v_1}$$

Chocando a terceira esphera, a segunda, conforme a formula geral, mantem-se em repouso e a terceira move-se com uma velocidade igual a v_1. O facto, pois, é sempre identico porque as espheras estão sempre animadas da mesma velocidade, percorrem sempre o mesmo espaço, e chocam sempre espheras iguaes em repouso.

Por conseguinte o tempo $t_1 = \frac{s}{v_1}$, gasto pela primeira para chocar a segunda, é o mesmo para todas as outras, de modo que ha tantos intervallos de tempo iguaes a esse quantos são os espaços existentes entre as espheras. O tempo t total necessario para que a ultima esphera entre em movimento, será:

$$t = \frac{(n-1)\,s}{v_1}$$

Esta formula nos mostra que quanto menor for o espaço s menor será o tempo preciso para mover-se a ultima esphera; quando esse intervallo for nullo, isto é, quando as espheras acharem-se em contacto, esse tempo póde ser considerado nullo, e então a transmissão da velocidade atravéz de todas as espheras intermediarias é instantanea.

Este caso curiosissimo é muito proprio para nos dar uma idéa exacta da natureza das impulsões, e póde praticamente ser realisado.

Suspendendo-se por meio de fios espheras iguaes de marfim de modo que ellas se toquem segundo a linha dos centros, e imprimindo-se uma velocidade á primeira, esta choca a segunda e, após o choque, á excepção da ultima, todas as outras ficam em repouso.

12. — *Duas espheras* A *e* B *de massa* m_1 *e elasticidade* (e) *animadas de uma velocidade commum* v_1, *formando entre si um angulo* α *chocam-se de tal modo que na occasião do choque a linha dos centros coincide com a direcção da velocidade de* B; *pede-se as velocidades finaes das duas espheras e o valor de* α *que torna maximum a velocidade de* A.

Decompondo a velocidade v_1 de A segundo a linha dos centros e a perpendicular a essa linha, temos para componentes de v_1, $v_1 \, sen \, \alpha$, $v_1 \cos \alpha$; a primeira não se modifica com o choque, quanto á segunda, altera-se como si o choque fosse directo, segundo a linha dos centros.

O problema reduz-se assim ao choque de duas espheras de elasticidade (e) segundo a linha dos centros com velocidade $v_1 \cos \alpha$ e v_1.

A segunda formula (c) nos dá neste conflicto, para velocidade de A, nella fazendo $v_2 = v_1 \cos \alpha$, e as massas iguaes:

$$v'' = \frac{v_1 + v_1 \cos \alpha + ev_1 - ev_1 \cos \alpha}{2} = \frac{v_1 \left(1 + e + (1 - e) \cos \alpha \right)}{2}$$

A velocidade final de A será, pois, a resultante das duas: $v_1 \, sen \, \alpha$, segundo a perpendicular, e v'' segundo a linha dos centros, e como estas componentes são entre si perpendiculares, teremos para valor dessa resultante:

$$(1) \qquad V_1^2 = \frac{v_1^2}{4} \left[1 + e + (1 - e) \cos \alpha \right]^2 + v_1^2 \, sen^2 \, \alpha.$$

A primeira formula (c) mediante as mesmas hypotheses anteriores nos dá para velocidade da esphera B:

$$V = \frac{v_1 + v_1 \cos \alpha - ev_1 + ev_1 \cos \alpha}{2} = \frac{v_1}{2} \left[1 - e + (1 + e) \cos \alpha \right]$$

velocidade que será a velocidade de B dirigida segundo a linha dos centros.

Para obtermos o valor de α que torna um maximum a velocidade V_1, temos que differenciar em relação a α o valor de V_1, dado pela relação (1), e igualar a zero a derivada, o que nos dá:

$$- \frac{v_1^2}{2} \left[1 + e + (1 - e) \cos \alpha \right] (1 - e) \, sen \, \alpha +$$
$$+ 2 v_1^2 \, sen \, \alpha \cos \alpha = 0$$

ou:

$$- (1 + e)(1 - e) - (1 - e)^2 \cos \alpha + 4 \cos \alpha = 0$$

d'onde:

$$-(1+e)(1-e)+3\cos\alpha-e^2\cos\alpha+2e\cos\alpha=0$$

ou:

$$-(1+e)(1-e)+\cos\alpha+\cos\alpha+\cos\alpha-e^2\cos\alpha+$$
$$+e\cos\alpha+e\cos\alpha=0$$

d'onde:

$$-(1-e)(1+e)+\cos\alpha(1-e^2)+\cos\alpha(1+e)+$$
$$+\cos\alpha(1+e)=0$$

ou, finalmente:

$$\cos\alpha=\frac{1-e}{3-e}$$

tal é o valor de α que torna V_1 um maximum.

13.—*Tres espheras perfeitamente elasticas,* m_1 m_2 *e* m_3, *achando-se respectivamente collocadas nos vertices de um triangulo conhecido, cujos angulos são:* α, β *e* γ; *pede-se a relação que deve existir entre as tres massas para que a esphera* m_1 *chocando obliquamente a esphera* m_2 *reflicta-se indo chocar a esphera* m_3 *e volte á sua posição primitiva.*

Suppondo-se os diametros das espheras sufficientemente pequenos em relação aos lados do triangulo, para que possam ser desprezados, e que, dado o conflicto, a linha dos centros seja perpendicular ao lado opposto ao vertice onde tem logar o encontro, decompondo-se a velocidade v da esphera m_1 segundo a linha dos centros e a perpendicular á essa linha, teremos para componentes respectivas:

$$v\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad , \quad v\cos\alpha\,.$$

Estando uma das espheras em repouso, fazendo-se na primeira formula geral (a^1) as hypotheses $v_2=0$ e $v_1=v\,\mathrm{sen}\,\alpha$, resulta:

$$v'=\frac{(m_1-m_2)\,v\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m_1+m_2}. \qquad (1)$$

Dado o choque, pois, a esphera m_1 ficará animada de uma velocidade cujas componentes serão : v_1 e $v \cos \alpha$. Para que a resultante tenha a direcção do outro lado do triangulo, cujas extremidades são m_2 e m_3, a condição será dada suppondo nullo o angulo formado por essa resultante com o lado $m_1 m_2$ do triangulo.

Designando esse angulo por θ, teremos :

$$v \cos \alpha = v' \, tg \left[(\alpha + \beta) - (90 - \theta) \right]$$

ou

$$v \cos \alpha = \frac{v' \left[tg (\alpha + \beta) - cotg \, \theta \right]}{1 + tg (\alpha + \beta) \, cotg \, \theta}$$

d'onde :

$$tg \, \theta = \frac{v \cos \alpha \, tg (\alpha + \beta) + v'}{v' \, tg (\alpha + \beta) - v \cos \alpha}$$

A condição de coincidencia será, pois, expressa pela relação :

$$v \cos \alpha \, tg (\alpha + \beta) + v' = 0$$

Sendo, porém :

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

resulta :

$$v' = v \cos \alpha \, tg \, \gamma$$

Substituindo v' pelo seu valor, temos :

$$\frac{(m_1 - m_2) \, v \, sen \, \alpha}{m_1 + m_2} = v \cos \alpha \, tg \, \gamma$$

d'onde :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{sen \, \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \, sen \, \gamma}{sen \, \alpha \cos \gamma - sen \, \gamma \cos \alpha} = \frac{sen (\alpha + \gamma)}{sen (\alpha - \gamma)}$$

Como :

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma)$$

resulta, finalmente:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha - \gamma)}$$

De modo identico scharíamos:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\beta - \alpha)}$$

14.— *Uma esphera A de massa* m_1 *animada de uma velocidade* [illegible] *a outra* B *de massa* m_2 *em repouso; sendo conhecidos a elasticidade e commum as duas esperas, e a relação* n *de suas massas, pede-se o angulo* α *que deve fazer a velocidade de* A *com a linha dos centros, no instante do choque para que o desvio de sua velocidade* [illegible] V [illegible] *o angulo por ella formado com a direcção* [illegible] *seja o maximum.*

Decompondo a velocidade segundo a linha dos centros e a perpendicular a esta linha, temos para componentes $a \cos \alpha$ e $a \operatorname{sen} \alpha$.

A segunda destas componentes não é alterada e a primeira modifica-se [illegible] esphera A, animada dessa velocidade chocasse directamente a esphera *B*.

A primeira das formulas geraes [illegible] dará para este caso, fazendo-se v_2 [illegible] e $v_1 = a \cos \alpha$:

$$v = \frac{(m_1 - m_2 e) a \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$

ou

$$v = \left(\frac{m_1}{m_2} - e \right) a \cos \alpha \cdot \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{n - e}{n - 1} a \cos \alpha$$

A velocidade final V de A será, pois, resultante das duas velocidades entre si perpendiculares $a \operatorname{sen} \alpha$ e $-v'$. Representando por β o angulo formado com V com a linha dos centros, por momento de desvio, teremos: $\operatorname{sen} \alpha = v' tg \beta =$ [illegible]

Substituindo v' por seu valor, resulta:

$$tg\,\alpha = \frac{n-e}{n+1} \cdot \frac{tg\,\alpha - tg\,\theta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\theta}$$

d'onde:

$$tg\,\theta = -\frac{\frac{1+e}{n+1}\,tg\,\alpha}{tg^2\,\alpha + \frac{n-e}{n+1}}$$

Tomando a derivada em relação a α, representando $tg\,\theta$ por γ resulta:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{-\left(\frac{n-e}{n+1} + tg^2\,\alpha\right)\frac{1+e}{n+1}\,\frac{1}{cos^2\,\alpha} + \frac{1+e}{n+1}\,2\,tg^2\,\frac{1}{cos^2\,\alpha}}{\left(tg^2\,\alpha + \frac{n-e}{n+1}\right)^2}$$

Igualando a zero e resolvendo em relação a α temos para valor de α, que torna θ um maximum:

$$tg\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{n-e}{n+1}}$$

Substituindo este valor na expressão de θ temos para valor maximum do angulo de desvio:

$$tg\,\theta = \mp\frac{1+e}{2\,(n-e)^{\frac{1}{2}}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Apreciada a lei de Newton no phenomeno do choque, é necessario, agora, que a completemos, pois como deixa ver esse phenomeno, que tão bem a caracterisa, ella só regula directamente a mutualidade mecanica nos casos em que os corpos podem ser concebidos reduzidos a pontos, entre os quaes o conflicto dá-se segundo as rectas por elles definidas.

Relativa primeiramente a estes casos particulares, essa importante lei foi depois definitivamente generalisada por J. Bernouilli e D'Alembert, substituindo a noção de igualdade que ella proclama entre a acção e a reacção pela concepção de equilibrio entre as forças perdidas e ganhas no conflicto.

Para bem se comprehender o espirito e a natureza desta feliz e fecunda generalisação, vamos aprecial-a no phenomeno que a inspirou e permittiu instituil-a, e que melhor a caracterisa.

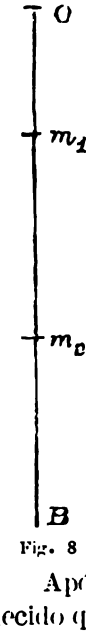


Fig. 8

Supponhamos duas moleculas de massas m_1 e m_2 invariavelmente ligadas entre si por meio de uma haste ou fio inflexivel e inextensivel O *B* (fig. 8), podendo girar em torno de um eixo horisontal, que se projecta em *O*, e sempre no mesmo plano vertical.

Este systema constitue um *pendulo* composto e representa um dos typos mais simples das modificações que nos movimentos respectivos de dous corpos possa determinar a natureza das ligações que entre elles existem.

No caso de só ter uma molecula na haste o pendulo diz-se *simples*, e a distancia om_1 representa o seu comprimento, de fórma que o pendulo composto comprehende tantos pendulos simples quantas as moleculas existentes na haste que estabelece a ligação entre ellas.

Após os estudos e experiencias de Galilêo ficou estabelecido que quanto menor é o comprimento de um pendulo simples mais rapido é o seu movimento, de maneira que suppondo-se a haste *OB* ligando entre si uma serie de moleculas, os pendulos simples por estas respectivamente constituidos terão o seu movimento tanto mais accelerado quanto mais proximas se acharem do ponto *O* de suspensão, e tanto mais retardado quanto mais afastadas do mesmo ponto.

Nestas condições, a ligação mutua e invariavel, estabelecida pela haste, obrigando todas as moleculas a realizarem as oscillações no mesmo tempo, determinará um acceleramento nos pesos mais afastados, produzido pelos mais proximos do ponto *O*, e um retardamento nos pesos mais proximos, produzido pelos mais afastados do mesmo ponto.

ɜendo assim, haverá necessariamente sobre a haste $O\ B$ situação para a qual o movimento da molecula que ahi :har não será nem retardado nem accelerado, de ma- ı que suas oscillações se effectuarão como si todas as as moleculas não existissem, isto é, um ponto tal que ·lle imaginassemos concentradas todas as moleculas do ɜma obteriamos um pendulo simples effectuando as suas lações no mesmo tempo em que o pendulo composto con- rado. A este ponto denomina-se *centro de oscillação*.

Todo pendulo composto tem, pois, um pendulo simples valente, de comprimento igual á distancia de seu centro scillação ao de suspensão e, portanto, as leis que regu- as oscillações de um são as mesmas que as que regem o outro.

O estudo do movimento de semelhante systema fica assim zido á determinação da distancia entre os centros de os- ção e suspensão, a qual, conhecida, refere o caso complexo aso fundamental do lulo simples.

A solução deste pro- ıa só apparece com ·ernouilli, que o re- ɜu pelo principio do iibrio da alavanca. Supponhamos o pen- constituido por duas ɜculas m_1 e m_2 (fig. 9.) Os pendulos simples e Om_1, formados por ı uma dessas mo- las, si ellas fossem

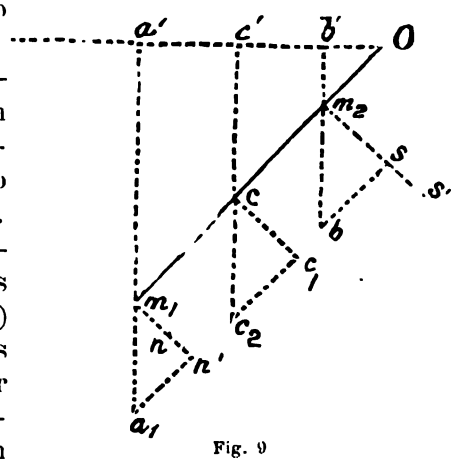


Fig. 9

das, fariam as suas oscillações em tempos desiguaes, os seus comprimentos são differentes, mas achando-se luas ligadas invariavelmente pela haste OB, a molecula ıctuará sobre m_1 accelerando-a e esta actuará sobre m_2

retardando-a, de sorte que o pendulo terá um movime mais vagaroso que o do pendulo Om_2 e mais rapido qu do pendulo om_1.

Entre as situações m_1 e m_2 estará, pois, o centro de cillação c que mover-se-ha segundo as mesmas leis qu pendulo composto correspondente.

Consideremos o pendulo recebendo um deslocamento finitamente pequeno sob a acção da gravidade, a qual, caso em que as moleculas fossem inteiramente livres, p duziria os deslocamentos que representaremos por:

$$m_1\ a_1 = cc_2 = m_2\ b$$

O movimento do ponto c é o mesmo que o que elle teria o systema fosse constituido por um pendulo simples de co primento oc, achando-se em c concentradas as massas m m_2; e as moleculas m_1 e m_2, si oscillassem isoladamente, achariam respectivamente em n e s' quando c estivesse c_1; porém a ligação que entre ellas existe faz com que m_1 accelere e esteja em n' e m_2 *se retarde* e esteja em s, quan c passa da posição c para c_1.

A força que accelera m_1 tem para medida a quantida de movimento perdida por m_2 e é igual a

$$m_2 \times s\ s'\ ,$$

e a que retarda m_2 tem para medida a quantidade de movi mento ganha por m_1 e é igual a

$$m_1 \times n\ n'\ .$$

As acções mutuas das duas moleculas, exercendo-se po intermedio da alavanca Om_1, cujo ponto de apoio é o centr O de suspensão, são proporcionaes aos braços da alavanc ou a suas distancias a esse ponto, e sendo essas acções iguaes pois que a força empregada por m_1 para retardar m_2 é igu á empregada por m_2 para accelerar m_1, teremos fazendo

$$m_1\ O = l_1\ ,\ m_2\ O = l_2\ ,\ c\ O = l\ :$$

$$m_1 \times n\ n' \times l_1 = m_2 \times s\ s' \times l_2$$

orém:

$$n\,n' = m_1\,n' - m_1\,n\ ,\ ss' = m_2\,s' - m_2\,s$$

'onde:

$$m_1 \times l_1\,(\,m_1\,n' - m_1\,n\,) = m_2 \times l_2\,(m_2\,s' - m_2\,s\,) \qquad (1)$$

Porém os arcos

$$m_1\,n,\ m_2\,s \text{ e } cc_1$$

do percorridos no mesmo tempo temos:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1\,n}{c\,c_1}\ ,\ \frac{l_2}{l} = \frac{m_2\,s'}{c\,c_1}$$

onde:

$$m_1\,n = \frac{l_1}{l} \times c\,c_1\ ,\ m_2\,s' = \frac{l_2}{l} \times c\,c_1$$

Tomando para unidade o espaço

$$m_1\,a_1 = c\,c_2 = m_2\,b$$

svido á acção da gravidade sobre as moleculas consideradas vres, temos :

$$m_1\,n = \frac{l_1}{l}\cos\beta,\ m_2\,s' = \frac{l_2}{l}\cos\beta$$

ndo β o angulo $c_1\,c\,c_2$.

Porém os triangulos

$$a_1\,m_1\,n' \text{ e } b\cdot m_2\,s\ ,$$

os dão:

$$m_1\,n' = \cos\beta\ ,\ m_2\,s = \cos\beta$$

'onde resulta, substituindo-se todos estes valores em (1):

$$m_1\,l_1\left(\cos\beta - \frac{l_1}{l}\cos\beta\right) = m_2\,l_2\left(\frac{l_2}{l}\cos\beta - \cos\beta\right) \qquad (2)$$

'onde:

$$l = \frac{m_1\,l_1^2 + m_2\,l_2^2}{l_1\,m_1 + l_2\,m_2}$$

Formula que nos dá o comprimento do pendulo simples sochrono do pendulo composto considerado.

s teremos:

entro de
entro,

(3)

3, no
ie l_2,

s lados
l aos
lucto

o da
dis-
com-
ulo

ria m_1
ia. no
infini-
se
suspeita,
com

retardar
uantidade

esta quantidade deve ser equivalente á somma das quantidades de movimento ganhas por

$$m_2 \text{ e } m_3$$

A quantidade de movimento ganha pela molecula m_3, será

$$(m_3 \times d'' d')$$

quanto á quantidade de movimento ganha por m_2, ella será igual a

$$m_2 (e'' e''' - e' e''),$$

ou

$$m_2 (e e' - e e'').$$

Como, pelo principio de equilibrio da alavanca, devem ser equivalentes essas quantidades, multiplicadas pelos braços das alavancas respectivas ou distancias dos pontos de applicação ao ponto de apoio, resulta:

$$l_1 \times m_1 \times n' n'' = l_2 \times m_2 (ee' - ee'') + l_3 \times m_3 \times d'' d'$$

ou:

$$l \times m_1 (nn'' - nn') = l_2 \times m_2 (ee' - ee'') \times l_3 \times m_3 (dd' - dd'').$$

Como os arcos

$$cc', \; n n'', \; e e'', \; d d''$$

devem ser descriptos no mesmo tempo, resulta :

$$\frac{l_1}{l} = \frac{nn''}{cc'}, \; \frac{l_2}{l} = \frac{ee''}{cc'}, \; \frac{l_3}{l} = \frac{dd''}{cc'}.$$

Attendendo que

$$nu = eu' = cu'' = du''' = 1,$$

temos:

$$cc' = \cos\beta, \; nn' = \cos\beta, \; ee' = \cos\beta, \; dd' = \cos\beta$$

d'onde, substituindo estes valores na equação de equilibrio, resulta, feitas as simplificações:

$$l_1 \times m_1 \left(\frac{l_1}{l} - 1\right) = l_2\, m_2 \left(1 - \frac{l_2}{l}\right) + l_3\, m_3 \left(1 - \frac{l_3}{l}\right)$$

d'onde:

$$l = \frac{l_1^2\, m_1 + l_2^2\, m_2 + l_3^2\, m_3}{l_1\, m_1 + l_2\, m_2 + l_3\, m_3}.$$

Esta formula nos dá:

$$l l_1\, m_1 + l l_2\, m_2 + l l_3\, m_3 = l_1^2\, m_1 + l_2^2\, m_2 + l_3^2\, m_3 \quad (3)$$

Designando por

$$d_1,\ d_2 \text{ e } d_3$$

as distancias respectivas das moleculas

$$m_1,\ m_2 \text{ e } m_3$$

ao centro c de oscillação, temos:

$$l = l_1 + d_1, \quad l = l_2 + d_2, \quad l = l_3 - d_3.$$

Substituindo em (3) l por

$$(l_1 + d_1)$$

no termo affecto de l_1, por

$$(l_2 + d_2),$$

no termo affecto de l_2 e por

$$(l_3 - d_3)$$

no termo affecto de l_3, resulta:

$$l_1 \times d_1 \times m_1 + l_2 \times m_2 \times d_2 = l_3 \times d_3 \times m_3.$$

Isto é, a somma dos productos de cada molecula situada de um lado do centro de oscillação pelas respectivas distancias aos centros de oscillação e suspensão, é equivalente á somma dos productos analogos, relativos ás moleculas situadas do lado opposto.

Baseado neste facto podemos facilmente generalisar a fórmula do raio a um numero qualquer de moleculas.

Supponhamos o pendulo composto de n moleculas:

$$m_1\ m_2\ m_3 \ldots\ m_c\ m_{c-1} \ldots\ldots\ m_{n-1}\ m_n$$

achando-se as moleculas de m_1 até m_c situadas acima do centro de oscillação, e de m_{c-1} até m_n abaixo desse centro.

Designando por l a distancia do centro de oscillação ao de suspensão, por $l_1, l_2, l_3 \ldots l_c, l_{c-1} \ldots l_n$, as distancias respectivas de cada molecula ao centro de suspensão, as distancias dessas moleculas ao centro de oscillação, serão:

$$l - l_1,\ l - l_2,\ l - l_3 \ldots\ l - l_c$$

$$l - l_{c-1},\ l - l_{c-2} \ldots\ l - l_{n-1},\ l - l_n$$

Formando os productos destas distancias pelas moleculas respectivas e pelas distancias ao eixo de suspensão, temos:

$$m_1 l_1 (l - l_1),\ m_2 l_2 (l - l_2), \ldots\ m_c l_c (l - l_c)$$

$$m_{c-1} l_{c-1} (l - l_{c-1}),\ m_{c-2} l_{c-2} (l - l_{c-2}) \ldots\ m_n l_n (l - l_n)$$

Como vimos, a somma dos primeiros productos devendo ser equivalente á somma dos segundos, resulta:

$$m_1 l_1 (l - l_1) + m_2 l_2 (l - l_2) + \ldots + m_c l_c (l - l_c) = m_{c-1} l_{c-1} (l - l_{c-1}) + \ldots + m_n l_n (l - l_n)$$

donde:

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2 + \ldots + m_n l_n^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 + \ldots + m_n l_n}$$

fórmula que nos dá o comprimento de um pendulo simples isochrono de um pendulo composto de um numero qualquer n de pesos situados sobre uma mesma haste.

Consideremos agora as duas moleculas situadas em hastes distinctas (fig. 11). Sejam on_1 e on_2 as duas hastes, sendo o angulo por ellas formado [illegible] — n_1 e n_2 a situação das moleculas m_1 e m_2; $n_1 o = l_2$, $n_2 o = l_1$, $n_1 n_2 = d$. Tiremos OX' e seja c o centro de oscillação e, portanto, oc o comprimento l do pendulo simples isochrono; $on_2 = a$ e $n_1 a_1 = cc_1 = n_2 b_1 = 1$. O caso que estamos considerando é analogo ao anterior, sendo apenas a alavanca reta substituida pela alavanca em angulo $n_1 on_2$.

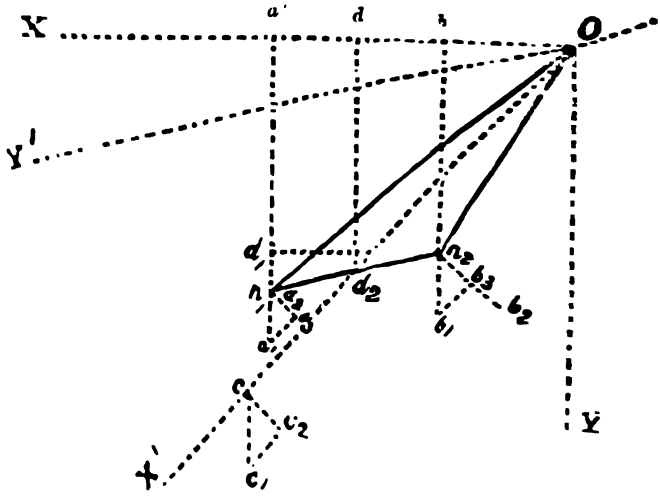


Fig. 11

Suppondo ao systema um deslocamento infinitamente pequeno sob a acção da gravidade, si as moleculas m_1 e m_2 [illegible] em livremente, no fim desse espaço de tempo estariam em [illegible] quando se attingisse a posição c_2, descrevendo [illegible] cc_2 proporcionaes aos raios l_2, l_1 e l; [illegible] que caracterisa o systema faz com que, [illegible] chega a c_2 a molecula m_1 esteja em a_3 [illegible] que tende a accelerar o seu movimento, [illegible] em b_1 devido á acção de m_1 que tende a [illegible] o movimento.

A força que accelera o movimento de m_1 é equivalente á quantidade de movimento perdida por m_2, isto é, igual a $(m_2 \times b_2 b_3)$; a que retarda o movimento de m_2 é igual á quantidade de movimento adquirida por m_1 ou $(m_1 \times a_2 a_3)$.

Actuando as duas moleculas uma sobre a outra por intermedio da alavanca $n_1 o n_2$, cujo ponto de apoio é o ponto O, temos, como no caso anterior, para condição de equilibrio:

$$m_1 \times a_2 a_3 \times l_1 = m_2 \times b_2 b_3 \times l_2$$

ou

$$l_1 \times m_1 (n_1 a_3 - n_1 a_2) = l_2 \times m_2 (n_2 b_2 - n_2 b_3) \qquad (1)$$

Como os arcos: $cc_2 = s$, $n_1 a_2$ e $n_2 b_2$ são descriptos no mesmo tempo, resulta:

$$\frac{l}{s} = \frac{l_1}{n_1 a_2}, \quad \frac{l}{s} = \frac{l_2}{n_2 b_2},$$

donde:

$$n_1 a_2 = \frac{s l_1}{l}, \quad n_2 b_2 = \frac{s l_2}{l}$$

Substituindo estes valores em (1) temos:

$$l_1 m_1 \left(n_1 a_3 - \frac{s l_1}{l}\right) = l_2 m_2 \left(\frac{s l_2}{l} - n_2 b_3\right) \qquad (2)$$

Vejamos como obter

$$n_1 a_3 \quad \text{e} \quad n_2 b_3$$

Supponhamos dous systemas de eixos coordenados tendo como origem commum o ponto o centro de suspensão: um orthogonal $o\,X$ e $o\,Y$, horisontal e vertical, o outro tendo o eixo dos x, $o\,X'$ coincidindo com o raio do centro de oscillação oc e o eixo dos y, $o\,Y'$ parallelo a recta $n_1 n_2$ que une as duas moleculas; baixe-se as perpendiculares

$$n_1 a', \; d_2 d' \quad \text{e} \quad n_2 b'.$$

ao eixo $o\,X$ e a perpendicular $d_2 d_1$ a recta $n_1 a'$. As coordenadas de m_1 relativamente aos eixos obliquos são:

$$n_1 d_2 = y, \; o d_2 = x;$$

as coordenadas de m_2 são :

$$n_2\, d_2 = n_1\, d_2 = y,\ od_2 = x.$$

Seja :

$$a'\, on_1 = \alpha,\ a'\, o\, c = \beta,\ \ a'\, o\, n_2 = \nu,\ \ a'\, n_1\, d_2 = \theta,\ \ o\, d_2\, n_2 = \varphi.$$

Os triangulos

$$n_1\, a_1\, a_3,\ od'\, d_2,\ d_1\, d_2\, n_1$$

nos dão, sendo, como já dissemos,

$$n_1\, a_1 = 1 :$$

$$(3) \qquad n_1\, a_3 = \cos\alpha = \frac{o\ a'}{l_1} = \frac{o\ d' + d'\ a'}{l_1} =$$

$$= \frac{x \cos\beta + y \operatorname{sen}\theta}{l_1} = \frac{sx + y \operatorname{sen}\theta}{l_1}$$

Semelhantemente o triangulo

$$n_2\, b_1\, b_3$$

nos dá :

$$n_2\, b_3 = \cos\nu = \frac{o\ b'}{l_2} = \frac{o\ d' - d'\ b'}{l_2} = \frac{x \cos\beta - y \operatorname{sen}\theta}{l_2} =$$

$$= \frac{sx - y \operatorname{sen}\theta}{l_2}$$

Substituindo-se este valor e o valor (3) na equação (2) resulta :

$$l_1 \times m_1 \left[\frac{sx + y \operatorname{sen}\theta}{l_1} - \frac{s\, l_1}{l} \right] =$$

$$= l_2 \times m_2 \left[\frac{s\, l_2}{l} - \frac{sx - y \operatorname{sen}\theta}{l_2} \right]$$

d'onde :

$$l = \frac{s\ [\ m_1\, l_1^2 + m_2\, l_2^2\ ]}{s\, x\ (\ m_1 + m_2\ ) + y \operatorname{sen}\theta\ (\ m_1 - m_2\ )} \qquad (4)$$

Os triangulos

$$o\, d_2\, n_1 \quad \text{e} \quad o\, d_2\, n_2$$

nos dão :

$$l_1^2 = x^2 + y^2 - 2\, x\, y \cos\varphi,\ l_2^2 = x^2 + y^2 + 2\, x\, y \cos\varphi$$

Substituindo estes valores na expressão (4), temos para fórmula do comprimento do pendulo simples isochrono, notando que

$$s = c\,c_2 = \cos\beta$$

$$(5)\quad l = \frac{\cos\beta\,[x^2(m_1+m_2)+y^2(m_1+m_2)-2\,xy\cos\varphi\,(m_1-m_2)]}{x\cos\beta\,(m_1+m_2)+y\,\mathrm{sen}\,\theta\,(m_1-m_2)}$$

No caso das moleculas iguaes, isto é, de $m_1 = m_2$ temos:

$$l = \frac{x^2+y^2}{x} = x + \frac{y^2}{x}$$

Para deduzir desta formula a expressão relativa a haste simples basta, como vamos mostrar, nella introduzir as modificações que resultam da supposição de coincidencia das duas hastes.

Seja

$$n_1\,d_2 = d_2\,n_2,$$

como na figura anterior, e as outras lettras indicando as mesmas grandezas.

Suppondo $n_1\,n_2$ girando em torno do ponto d_2, (fig. 12) a molecula m_2 irá ficar em n'_2 e a molecula m_1 na posição n'_1, quando $n_1\,n_2$ coincidir com oc. O angulo φ ou $o\,d_2\,n_1$ ficará sendo de 180°, donde $\cos\varphi = -1$; o angulo θ ou $a'\,n_1\,d_2$, será:

$$a'_1\,n'_1\,d_2 = 90 - a'\,o\,d_2 = 90 - \beta;$$

d'onde

$$\mathrm{sen}\,\theta = \cos\beta = s.$$

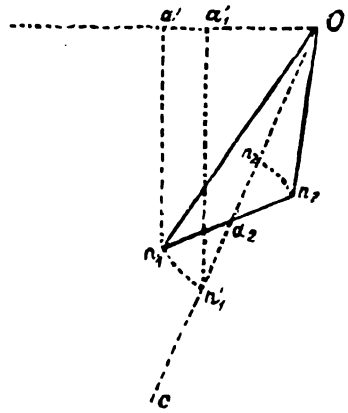


Fig. 12

Substituindo estes valores em (5) resulta

$$l = \frac{x^2(m_1+m_2)+y^2(m_1+m_2)+2\,xy\,(m_1-m_2)}{x\,(m_1+m_2)+y\,(m_1-m_2)}$$

Porém :

(6) $$l_1 = O\,d_2 + d_2\,n'_1 = x + y,$$

$$l_2 = o\,d_2 - d_2\,n'_2 = x - y \qquad (7)$$

d'onde :

(8) $$l_1^2 = x^2 + y^2 + 2\,x\,y,$$

$$l_2^2 = x^2 + y^2 - 2\,x\,y \qquad (9)$$

Multiplicando (6) por m_1 e (7) por m_2 e sommando os resultados temos :

$$m_1\,l_1 + m_2\,l_2 = x\,(m_1 + m_2) + y\,(m_1 - m_2) \qquad (10)$$

Multiplicando (8) por m_1 e (9) por m_2 e sommando os resultados temos :

$$m_1\,l_1^2 + m_2\,l_2^2 = x^2\,(m_1 + m_2) + y^2\,(m_1 + m_2) + 2\,xy\,(m_1 - m_2)$$

Substituindo estes valores na expressão de l, resulta :

$$l = \frac{m_1\,l_1^2 + m_2\,l_2^2}{m_1\,l_1 + m_2\,l_2}$$

Consideremos, agora as moleculas m_1 e m_2 com massas elementares dm, iguaes e fazendo parte de um corpo oscillando em torno do ponto O, projecção do eixo horisontal — Suppondo essas duas moleculas do corpo ligadas ao ponto O por meio de rectas, o movimento do corpo não alterando as distancias relativas dessas moleculas, o facto passa-se para ellas como no caso anterior, isto é, como se estivessem ligadas entre si por intermedio de uma alavanca em angulo tendo O para ponto de apoio. Sendo assim a fórmula geral nos dá no caso de duas moleculas iguaes :

$$l\,x\,dm = x^2\,dm + y^2\,dm$$

integrando e notando que l é constante:

$$l = \frac{\int x^2\,dm + \int y^2\,dm}{\int x\,dm} \qquad (k)$$

Os limites da integração são dados pela figura do corpo oscillante.

A avaliação do comprimento do pendulo simples isochrono fica assim referida a determinação da integral do producto da molecula pelo quadrado de suas distancias a dous planos perpendiculares entre si passando pelo eixo de suspensão.

Para mostrar isto supponhamos o corpo dividido por planos parallelos ao plano horisontal em laminas infinitamente delgadas; seja dx a espessura de uma dessas laminas, e S a sua superficie.

Como todos os pontos da superfice S distam igualmente do plano horisontal, segue-se que $x^2\ S\ dx$ representará o producto de todos os pontos da lamina pelo quadrado de suas distancias ao plano horisontal; dividindo, do mesmo modo, o corpo em laminas infinitamente delgadas por planos parallelos, ao plano vertical, designado por dy a espessura da lamina e S' a sua superficie teremos: $y^2\ S'\ dy$ para producto de todos os pontos da lamina pelo quadrado de suas distancias ao plano vertical. Substituindo estes valores na expressão (k), resulta:

$$l = \frac{\int x^2\ S\ dx + \int y^2\ S'\ dy}{\int x\ S\ dx}$$

Para que o leitor comprehenda o uso desta fórmula consideremos alguns exemplos.

1º — Supponhamos o pendulo constituido por um parallelepipedo rectangular fig. (13) girando entorno de um eixo Ox perpendicular ao meio da aresta bb_1.

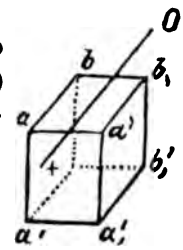


Fig. 13

Seja:

$$aa' = h,\ aa_1 = e,\ ab = c$$

Neste caso as secções feitas por planos parallelos ao plano horisontal passando pelo eixo de suspensão são rectangulos

iguaes entre si e, portanto, S é uma grandeza constante; do mesmo modo as secções feitas por planos parallelos ao plano perpendicular ao primeiro, passando tambem pelo eixo, são rectangulos iguaes entre si, e, portanto, S' é uma grandeza constante.

Teremos, pois:

$$\int x^2 S\, dx = S \int x^2\, dx = S \frac{x^3}{3}$$

ou

$$\int x^2 S\, dx = e \times c \frac{x^3}{3}$$

Tomando entre os limites

$$x = o \quad \text{e} \quad x = h$$

resulta:

$$\int_0^h S x^2\, dx = e \times c \frac{h^3}{3}$$

De modo analogo, temos:

$$\int y^2 S'\, dy = S' \int y^2\, dy = S' \frac{y^3}{3} = c \times h \frac{\overline{y^3}}{3}$$

Tomando entre os limites

$$y = o \quad \text{e} \quad y = \frac{e}{2},$$

teremos:

$$\int_0^{\frac{e}{2}} y^2 S'\, dy = c \times h \times \frac{e^3}{24}$$

Attendendo a que este resultado é relativo á metade do corpo, teremos, para todo o parallelepipedo:

$$\int y^2 S'\, dy = c \times h \frac{e^3}{12}$$

Finalmente a integral do denominador da formula geral será neste caso:

$$\int_0^h x\,S\,dx = S\int x\,dx = e \times c\,\frac{h^2}{2}$$

Substituindo estes valores na formula geral, teremos para valor de l:

$$l = \frac{2h}{3} + \frac{e^2}{6h}$$

Suppondo e infinitamente pequeno, isto é, suppondo o pendulo constituido por um rectangulo girando em torno de um dos seus lados, resulta:

$$l = \frac{2}{3}\,h$$

Suppondo, além disso, c infinitamente pequeno ou o pendulo reduzido a uma recta, temos:

$$l = \frac{2}{3}\,h$$

de sorte que em qualquer destes dous casos o comprimento do pendulo simples vem a ser igual a dous terços de distancia ao centro de oscillação.

2º — Seja o pendulo constituido por uma esphera cujo centro representaremos por c (fig. 14). Neste caso teremos:

$$S = \pi \times e\,\overline{b}^2 \qquad (1)$$

pois que as secções feitas parallelamente ao plano horisontal, passando pelo eixo xx, são circulos.

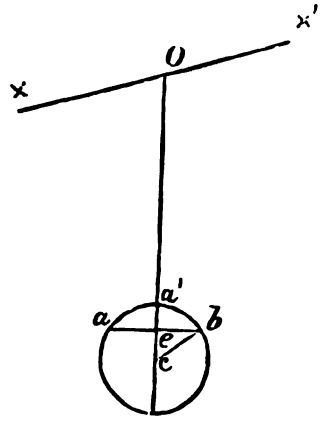


Fig. 14

Fazendo:

$a'e = z$, $ca' = r$, $oe = \varpi$

o triangulo *ebc* nos dá :

$$\overline{eb}^2 = r^2 - (r - z)^2 = 2\,rz - z^2$$

d'onde, substituindo em (1), resulta :

$$S = \pi\,(2\,rz - z^2)$$

Fazendo

$$a'\,o = a,$$

temos :

$$Oe = x = a + z, \cdot\ dx = dz, \quad x^2 = (a + z)^2$$

d'onde :

$$\int Sx^2\,dx = \int \pi\,(2rz - z^2)\,(a + z)^2\,dz$$

ou :

$$\int Sx^2\,dx = \pi \left[\int 2\,a^2\,r\,z\,dz - \int a^2\,z^2\,dz + \right.$$

$$\left. + \int 4\,a\,r\,z^2\,dz + \int 2\,r\,z^3\,dz - \int 2\,a\,z^3\,dz - \int z^4\,dz \right]$$

Tomando as integraes entre os limites *o* e *2r*, resulta :

$$\int_0^{2r} Sx^2\,dx = \pi \left[\frac{4}{3}\,a^2\,r^3 + \frac{8}{3}\,ar^4 + \frac{8}{5}\,r^5 \right]$$

Relativamente ás secções feitas parallelamente ao plano vertical passando pelo eixo $X\,X'$ perpendicularmente ao plano horisontal, a questão seria a mesma, sendo apenas a distancia $o\,a'$ ou a substituida por $-r$; teriamos, pois, para numerador da formula geral :

$$\int Sx^2\,dx + \int S'\,y^2\,dy = \pi \left[\frac{4}{3}\,a^2\,r^3 + \left(\frac{8}{3}\,ar^4 + \frac{8}{5}\,r^5 \right) + \right.$$

$$+ \pi\,\frac{4}{15}\,r^5 = \pi \left[\frac{4}{3}\,a^2\,r^3 + \frac{8}{3}\,ar^4 + \frac{28}{15}\,r^5 \right]$$

Para o denominador da mesma formula temos:

$$\int x\, S\, dx = \int (a + z)\, \pi\, (ar\, z - z^2)\, dz =$$

$$= \pi \left[ar\, z^2 - \frac{az^3}{3} + \frac{2}{3} r\, z^3 - \frac{z^4}{4} \right]$$

Tomando entre os limites $z = o$ e $z = 2\, r$, resulta:

$$\int_0^{2r} Sx\, dx = \pi \left(\frac{4}{3} ar^3 + \frac{4}{3} r^4 \right)$$

Substituindo os valores destas integraes na formula de l, resulta:

$$l = \frac{4\, a^2 + 8\, ar + \frac{28}{5} r^2}{4\, (a + r)} = \frac{a^2 + 2\, ar + r^2}{a + r} + \frac{2}{5} \frac{r^2}{a + r}$$

$$= a + r + \frac{2}{5} \frac{r^2}{a + r}$$

Representando por d a distancia $c\, o$ do centro da esphera ao centro de suspensão temos:

$$l = d + \frac{2}{5} \frac{r^2}{d}$$

resultado que nos mostra achar-se o centro de oscillação abaixo do centro da esphera.

Suppondo o raio r muito pequeno em relação á distancia d, podemos despresar o segundo termo e tomar o centro da esphera pelo centro de oscillação. Na hypothese de $a = o$, isto é, de achar-se o centro de suspensão na superficie espherica, temos:

$$l = r + \frac{2}{5}\, r,$$

isto é, o centro de oscillação fica neste caso abaixo do centro da esphera, de uma quantidade igual a dous quintos do raio.

Estes exemplos são sufficientes para que o leitor bem comprehenda a marcha a seguir nas applicações concernentes á determinação do centro de oscillação.

O modo engenhoso por que Bernouilli resolveu a questão do pendulo, concebendo a quantidade de movimento perdida pelo peso mais proximo do centro de suspensão, e a quantidade de movimento ganha pelo peso mais afastado desse ponto, como satisfazendo as leis do equilibrio da alavanca, relativa a esse ponto de suspensão, constituiu o verdadeiro esboço do principio geral da communicação do movimento, systematisado, como vamos agora ver, por d'Alembert, e que em essencia não é mais que a lei de Newton generalisada a um systema qualquer.

Consideremos um systema de corpos m_1, m_2, m_3, etc., invariavelmente ligados entre si; sejam v_1, v_2, v_3, etc., as velocidades respectivas desses corpos no caso em que elles fossem inteiramente livres, e u_1, u_2, u_3, etc., as velocidades respectivas de que se acham realmente animados em consequencia das ligações constantes, e que caracterisam o systema.

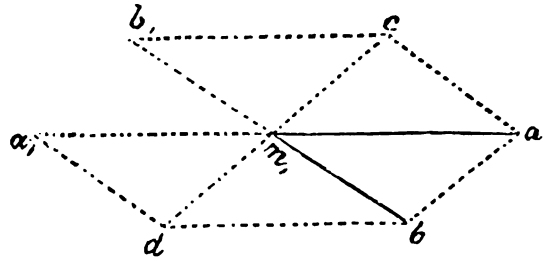


Fig. 15

Considerando um desses corpos m, fig. (15), por exemplo, e representando a velocidade v_1, pela recta $m_1 a$, isto é, representando por $m_1 a$ a velocidade que teria m_1 se fosse inteiramente livre; e por $m_1 b$ a velocidade u_1, isto é, a velocidade que realmente possue m_1, em virtude das ligações do systema, é claro que podemos conceber a velocidade primitiva v_1 ou $m_1 a$ como resultante da velocidade effectiva u_1 ou $m_1 b$ e de uma outra velocidade $m_1 c$; e de modo semelhante para todos os outros corpos,

de sorte que cada uma das velocidades primitivas v_1, v_2, v_3 etc, possa ser considerada como a resultante da velocidade effectiva correspondente u_1, u_2, u_3 etc. e de uma outra que representaremos respectivamente por ω_1, ω_2, ω_3 etc.

As quantidades de movimento:

$$m_1\ v_1,\ m_2\ v_2,\ m_3\ v_3,\ \text{etc.}$$

dos differentes corpos do systema, considerados inteiramente livres, serão, pois, substituidas pelas suas componentes:

$$(m_1\ u_1,\ m_1\ \omega_1),\ (m_2\ u_2,\ m_2\ \omega_2),\ (m_3\ u_3,\ m_3\ \omega_3),\ \text{etc.}$$

Em consequencia, porém, das ligações do systema, estas quantidades de movimento devem reduzir-se respectivamente a $m_1\ \omega_1$, $m_2\ \omega_2$, $m_3\ \omega_3$... etc. e para isso é necessario que as quantidades de movimento — : $m_1\ \omega_1$, $m_2\ \omega_2$... etc. se neutralisem mutuamente, isto é, que haja equilibrio entre as suas acções mutuas.

A componente $m_1\ c$ ou ω_1 da velocidade primitiva de cada um dos corpos representa a velocidade perdida por esse corpo.

Prolongando $m_1\ c$ e pelo ponto b tirando uma parallela a $m_1\ a$, resulta, evidentemente, que a velocidade effectiva u_1 ou $m_1\ b$ póde ser considerada como a resultante da velocidade primitiva $m_1\ a$ e de uma outra $m_1\ d$, que vem a ser a velocidade ganha pelo corpo m_1, a qual, como se vê, é igual e de signal contrario á velocidade perdida; de sorte que $m_1\ \omega_1$, $m_2\ \omega_2$... etc. veem a representar as quantidades de movimento devidas ás velocidades perdidas ou ganhas em virtude das acções reciprocas dos corpos, devidas ás ligações do systema.

Desta concepção resulta o principio de d'Alembert, que póde ser enunciado do seguinte modo: *Ha equilibrio constante entre as quantidades de movimento perdidas ou ganhas pelos differentes corpos de um systema em suas*

reacções, attendidas as condições de ligação que caracterisam esse systema.

Assim formulado, o principio de d'Alembert apresenta sérios difficuldades nas applicações, relativas a avaliação das quantidades de movimento perdidas ou ganhas. Para afastar este grave embaraço Euler o concebeu sob uma fórma incontestavelmente muito mais vantajosa.

Prolongando a velocidade primitiva $m_1 a$ de uma quantidade igual $m_1 a_1$ e, do mesmo modo, a velocidade effectiva; ligando o ponto a_1 ao ponto d e o ponto b_1 ao ponto c_1, ficarão formados dous parallelogrammos $b_1 m_1 a c$ e $a_1 d b m_1$, o primeiro dos quaes nos mostra que a velocidade perdida $m_1 c$ póde ser considerada como resultante da velocidade primitiva $m_1 a$ e da velocidade effectiva tomada com signal contrario; e o segundo nos mostra que a velocidade ganha $m_1 d$ póde ser considerada como resultante da velocidade effectiva $m_1 b$ e da velocidade primitiva tomada com signal contrario, de sorte que no principio de d'Alembert as quantidades de movimento devidas ás velocidades perdidas ou ganhas podem ser substituidas pelas quantidades de movimento devidas ás velocidades primitivas e as effectivas tomadas com signal contrario, ou pelas quantidades de movimento devidas ás velocidades effectivas e ás velocidades primitivas tomadas com signal contrario — Desta fórma enunciado o principio, evita-se a consideração das quantidades de movimento perdidas ou ganhas, cuja apreciação torna-se embaraçosa, formulando-se a relação entre os verdadeiros elementos do problema dynamico: os elementos conhecidos, que são as velocidades primitivas e os elementos incognitos procurados, que são as velocidades effectivas.

Tal foi a concepção de Euler para substituir o primitivo equilibrio entre as quantidades de movimento perdidas ou ganhas no conflicto, pelo equilibrio entre as quantidades de movimento primitivas que teriam os corpos si fossem intei-

ramente livres e as quantidades de movimento effectivas ou restantes tomadas com signal contrario.

Para bem comprehender o verdadeiro espirito da admiravel descoberta de d'Alembert vamos applical-a aos casos do choque e do pendulo.

Consideremos dous corpos duros m_1 e m_2 movendo-se na mesma direcção e sentido, o primeiro com a velocidade v_1 e o segundo com a velocidade v_2.

Após o conflicto, designado por u a velocidade restante, a velocidade perdida por m_1 vem a ser igual a differença entre a velocidade primitiva v_1 e a restante u, ou igual a $(v_1 - u)$; e a velocidade ganha por m_2 vem a ser igual á velocidade restante u diminuida da velocidade primitiva v_2 ou igual a $(u - v_2)$.

Segundo o principio de d'Alembert devendo estas quantidades de movimento equilibrarem-se, resulta:

$$m_1 (v_1 - u_2) = m_2 (u - v_2),$$

d'onde:

$$u = \frac{m\, v_1 + m_2\, v_2}{m_1 + m_2}$$

Consideremos o pendulo constituido por dous pesos m_1 e m_2, situados sobre uma mesma haste.

Sejam v_1 e v_2 as velocidades desses pesos si se movessem inteiramente livres ou as suas velocidades primitivas; v' e v'' as velocidades que adquirem em consequencia da ligação ou as velocidades effectivas, e l_1 e l_2 as distancias respectivas desses pesos ao centro de suspensão.

A velocidade ganha por m_2 será $(v'' - v_2)$ e a velocidade perdida por m_1 será $(v_1 - v')$, e as quantidades de movimentos correspondentes serão:

$$m_2 (v'' - v_2),\ m_1 (v_1 - v')$$

Estas quantidades devendo equilibrarem-se, tendo-se em

consideração a ligação que caracterisa o systema, a qual é constituida por uma alavanca de braços l_1 e l_2, resulta :

$$l_2\, m_2\, (\, v'' - v_2\,) = l_1\, m_1\, (\, v_1 - v'\,) \qquad (1)$$

Porém entre as velocidades definitivas e as distancias l_1 e l_2 temos a relação:

$$\frac{v'}{v''} = \frac{l_1}{l_2}$$

d'onde:

$$v'' = \frac{v'\, l_2}{l_1}$$

Substituindo em (1) e effectuando os calculos, resulta:

$$v' = \frac{m_2\, v_2\, l_1\, l_2 + m_1\, v_1\, l_1^2}{m_2\, l_2^2 + m_1\, l_1^2}$$

Do mesmo modo obteriamos v'', eliminando v' na equação (1).

Com o principio de d'Alembert as questões relativas ao movimento dos *systemas* podem ser referidas a simples questões correspondentes de statica.

Formulando o equilibrio entre as forças perdidas ou ganhas no conflicto semelhante concepção logo deixa ver não poder applicar-se no caso fundamental da dynamica constituido pelo movimento do ponto, de modo que é exagerar o alcance affirmar que por ella podemos reduzir todas as questões de dynamica a questões de equilibrio.

Realmente esse principio suppõe sempre a existencia do systema, isto é, a existencia de ligações que estabelecem o conflicto, pela consideração, como vimos, em que decompondo-se o movimento que teria um corpo si fosse inteiramente livre em duas partes, um dos quaes seja o que elle perde, o outro será necessariamente o movimento de que elle se acha realmente animado, o que quer dizer que o movimento real

de cada ponto do corpo é o resultado do movimento que elle teria si fosse inteiramente livre e da resistencia que elle experimenta em virtude das ligações com os outros pontos.

Não obstante o movimento dos systemas comprehender o movimento do ponto e constituir por sua importancia, difficuldade e extensão o problema capital da dynamica, não é correcto dar esse alcance ao principio de d'Alembert, pois no estudo normal da mecanica o movimento do ponto deve ser sempre directamente instituido para servir de base ao problema geral.

Tão importante e fecundo principio, embora referindo as questões de movimento dos systemas a questões de equilibrio, não é directamente relativo a este estado, de sorte que a sua plena e geral utilisação, para facilitar e aperfeiçoar o estudo do movimento, exigia a generalisação da theoria do equilibrio e d'ahi o principio das *velocidades virtuaes*.

Afim de tornar bem claro o verdadeiro espirito e o alcance desta admiravel concepção, esboçada por Galileo e mais tarde generalisada por João Bernouilli e Lagrange, distinguiremos dous casos: o *ponto* e o *systema*.

Denomina-se *velocidade virtual* de um ponto em equilibrio, sob a acção de forças quaesquer, a velocidade que esse ponto adquiriria no primeiro instante de seu movimento, suppondo-se o equilibrio deixando de existir.

Estas velocidades são avaliadas projectando-as sobre as direcções das forças que actuam sobre o ponto, e considerando-as positivas ou negativas conforme a projecção cahir sobre a direcção da força ou sobre seu prolongamento.

O producto de cada força pela velocidade virtual assim avaliada segundo sua direcção, denomina-se *momento virtual* dessa força; e para caracterisar os deslocamentos virtuaes emprega-se a lettra δ precedendo aquella que representa esse deslocamento quando considerado infinitesimal.

Isto posto, consideremos o caso do ponto livre.

Seja um ponto m (fig. 16) em equilibrio sob a acção das forças:

$$P, P, P, P, etc.$$

Pelo ponto m tiremos tres eixos coordenados rectangulares, e seja $m\,m'$ uma das forças consideradas, P, por exemplo. Construindo com $m\,m'$ como diagonal um parallelepipedo sobre os tres eixos, as rectas $m\,n$, $m\,n'$ e $m\,n'''$ serão respectivamente as projecções dessa força sobre o eixo dos z, dos y e dos x.

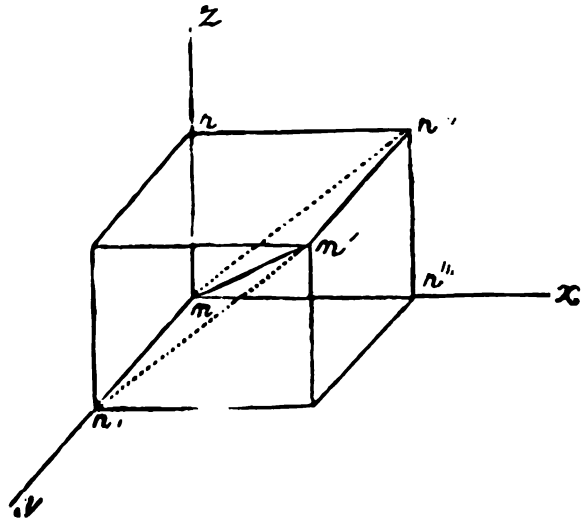


Fig. 16

Suppondo o ponto m sujeito sómente á acção das tres forças $m\,n$, $m\,n'$ e $m\,n'''$, conforme o principio de Galilêo, já estudado, as duas forças $m\,n$ e $m\,n''$ terão como resultante $m\,n''$, diagonal do rectangulo sobre ellas construido; e essa resultante combinada com a força $m\,n'$ dará como resultante a força $m\,m'$, isto é, a força P.

A acção da força P sobre o ponto m póde, pois, ser substituida pela acção equivalente das tres forças que representam as suas projecções sobre os eixos.

Representando por a, b e c os angulos dessa força com os eixos dos x, y e z, podemos assim substituil-a pelas equivalentes:

$$P \cos a,\ P \cos b,\ P \cos c$$

Raciocinando do mesmo modo para com as outras forças e representando por:

$$a',\ b',\ c',\ a'',\ b'',\ c'',\ etc.$$

os angulos por cada uma dellas formados com os respectivos eixos, podemos substituir as forças

$$P',\ P'',\ P''',\ etc.$$

pelas suas componentes equivalentes

$$\begin{array}{ccc} P' \cos a', & P' \cos b', & P' \cos c' \\ P'' \cos a'', & P'' \cos b'', & P'' \cos c'' \\ P''' \cos a''', & P''' \cos b''', & P''' \cos c''' \\ etc. & etc. & etc. \end{array}$$

Sommando as componentes relativas a cada eixo, as forças que actuam sobre o ponto ficam finalmente substituidas por tres forças rectangulares que designaremos por X, Y, e Z e cujas expressões são as seguintes:

$$(1) \quad \begin{cases} X = P \cos a + P' \cos a' + P'' \cos a'' + etc. \\ Y = P \cos b + P' \cos b' + P'' \cos b'' + etc. \\ Z = P \cos c + P' \cos c' + P'' \cos c'' + etc. \end{cases}$$

Representando por R a resultante das forças

$$P,\ P',\ P''\ etc.$$

e por

$$\alpha\ ,\ \beta\ e\ \gamma$$

os angulos dessa resultante com os tres eixos teremos:

$$X = R \cos \alpha\ ,\ Y = R \cos \beta\ ,\ Z = R \cos \gamma \qquad (2)$$

Supponhamos agora que o equilibrio deixa de existir e que o ponto m soffre um deslocamento, que no caso que consideramos do ponto livre póde ser finito ou infinitesimal, mas que supporemos infinitesimal e representaremos por δs.

Representando por

$$\theta, \theta' \text{ e } \theta''$$

os angulos formados pela direcção desse *deslocamento virtual* com os tres eixos a que se acha referido o ponto m por

$$\Delta, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \; etc.$$

os angulos dessa direcção com as forças

$$R, P, P', P'' \; etc.$$

teremos, conforme os principios de geometria conhecidos

$$\cos\Delta = \cos\theta \cos\alpha + \cos\theta' \cos\beta + \cos\theta'' \cos\gamma$$

$$(3) \quad \cos\lambda = \cos\theta \cos a = \cos\theta' \cos b + \cos\theta'' \cos c$$

$$\cos\lambda_1 = \cos\theta \cos a' + \cos\theta' \cos b' + \cos\theta'' \cos c'$$

$$etc. \qquad etc. \qquad etc.$$

Eliminando entre a primeira destas equações e a equação (2) os cosenos dos angulos formados pela resultante R, com os tres eixos, resulta :

$$R \cos\Delta = X \cos\theta + Y \cos\theta' + Z \cos\theta'' \qquad (4)$$

Multiplicando a primeira equação (1) por $\cos\theta$, a segunda por $\cos\theta'$ e a terceira por $\cos\theta''$ e sommando-as membro a membro, temos, attendendo ás relações (3) e (4):

$$(5) \quad R \cos\Delta = P \cos\lambda + P' \cos\lambda_1 + P'' \cos\lambda_2 + etc.$$

Sendo :

$$\Delta, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, etc.$$

os angulos que formam respectivamente as forças R, P, P' $etc.$, com a direcção do deslocamento virtual, direcção que

supporemos qualquer, a igualdade (5) traduzida em linguagem vulgar nos mostra que *a projecção da resultante de um numero qualquer de forças sobre um eixo qualquer é equivalente á somma das projecções de todas as componentes sobre o mesmo eixo.*

Projectando agora o deslocamento virtual δs sobre as direcções das forças R, P, P', *etc.* e designando por

$$\delta r \ , \ \delta p \ , \ \delta p_1 \ , \ \delta p_2 \ etc.$$

essas projecções, teremos:

$$\delta r = \delta s \cos \triangle \ , \ \delta p = \delta s \cos \lambda, \ \delta p_1 = \delta s \cos \lambda_1 \ , \ etc. \ etc.$$

sendo

$$\delta r \ , \ \delta p \ , \ \delta p_1 \ etc.$$

positivos ou negativos conforme se acharem sobre a direcção da força correspondente ou sobre seu prolongamento.

Estas relações combinadas com a equação (5) nos dão:

$$R\delta r = P\delta p + P'\delta p_1 + P''\delta p_2 + P'''\delta p_3 + etc.$$

ou resumidamente:

$$R\delta r = \Sigma \ P\delta p.$$

Estando o ponto m em equilibrio sobre a acção das forças P, P', P'' *etc.*, e sendo esse ponto inteiramente livre a resultante R deve ser nulla, isto é, $R=o$, d'onde resulta para condição de equilibrio:

$$P\delta p + P'\delta p_1 + P''\delta p_2 + etc = o$$

ou

$$\Sigma \ P\delta p = o \qquad (7)$$

isto é, *para que exista o equilibrio é necessario que a somma dos momentos virtuaes de todas as forças que actuam sobre o ponto seja nulla.*

A equação (7) póde tomar uma outra fórma mais conveniente ao calculo.

Designando por

$$\delta x,\ \delta y \text{ e } \delta z$$

as projecções do deslocamento virtual δs sobre os tres eixos, teremos:

$$\delta x = \delta s \cos \theta\ ,\ \delta y = \delta s \cos \theta'\ ,\ \delta z = \delta s \cos \theta''$$

Eliminando

$$\cos \theta\ ,\ \cos \theta' \text{ e } \cos \theta''$$

entre estas relações e a equação (4) e attendendo que

$$\delta r = \delta s \cos \Delta\ ,$$

resulta:

$$R\delta r = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

A equação de equilibrio para o ponto livre tomará assim a fórma:

$$X\,\delta x + Y\delta y + Z\delta z = o \qquad (8)$$

Si o ponto considerado em vez de ser livre for sujeito a permanecer sobre uma curva ou sobre uma superficie, em qualquer destes casos as forças que o mantem em equilibrio determinam uma pressão sobre a curva ou sobre a superficie e estas, de conformidade com a lei de Newton, reagem sobre o ponto, sendo essa reacção normal a curva ou a superficie, segundo a lei complementar de Carnot.

Para que o ponto esteja em equilibrio, como se suppõe, é necessario, pois, que a resultante das forças seja tambem normal á linha ou á superficie.

Suppondo ao ponto um deslocamento virtual, si este for infinitamente pequeno, o que nos dous casos é indispensavel, dar-se-ha elle, no caso da curva, segundo a tangente a essa curva, e, no segundo caso, no plano tangente a super-

ficie, de modo que em qualquer dos dous casos a projecção desse deslocamento, velocidade virtual no primeiro instante do movimento, sobre a resultante normal á linha ou á superficie será nulla. Teremos, pois, $R\delta r = o$.

Por conseguinte, como no caso do ponto livre, a condição de equilibrio será expressa pela equação:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = o$$

Vejamos o caso geral dos *systemas* ou conjuncto de pontos entre si ligados de uma maneira qualquer.

Denomina-se *movimento virtual* de um systema todo deslocamento infinitamente pequeno que se possa attribuir ao systema sem que esse deslocamento realmente se effectue.

Para maior clareza consideremos em primeiro logar o typo mais simples que a questão póde apresentar.

Supponhamos dous pontos m e m' entre si ligados e respectivamente sob a acção de duas forças iguaes F e F' e directamente oppostas. Sejam

$$(x, y, z), (x', y', z')$$

as coordenadas desses pontos referidos a tres eixos rectangulares, e r a distancia entre elles.

A expressão dessa distancia será :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Os cosenos dos angulos formados pela força F com os eixos sendo :

$$-\frac{x - x'}{r}, -\frac{y - y'}{r}, -\frac{z - z'}{r}$$

as projecções dos deslocamentos virtuaes do ponto de applicação da força F sobre os tres eixos, em virtude do movimento virtual que se suppõe ao systema, serão :

$$-\frac{x - x'}{r}\delta x, -\frac{y - y'}{r}\delta y, -\frac{z - z'}{r}\delta z;$$

d'onde resulta para trabalho virtual da força F :

$$-\frac{F}{r}\left((x-x')\,\delta x + (y-y')\,\delta y + (z-z')\,\delta z \right)$$

Sendo a força F' da mesma direcção e sentido contrario que a força F, teremos para expressão de seu trabalho virtual :

$$\frac{F'}{r}\left((x-x')\,\delta x' + (y-y')\,\delta y' + (z-z')\,\delta z' \right)$$

Sendo $F = F'$ a somma dos trabalhos virtuaes dessas duas forças será :

$$(1) \quad \frac{F}{r}\left((x-x')(\delta x-\delta x') + (y-y')(\delta y-\delta y') + (z-z')(\delta z-\delta z') \right)$$

Differenciando a expressão de r, substituindo o signal d de differenciação pelo signal δ, substituição cuja explicação mais adiante daremos no estudo do calculo das variações, resulta :

$$r\,\delta r = (x-x')(\delta x-\delta x') + (y-y')(\delta y-\delta y') + (z-z')(\delta z-\delta z')$$

Substituindo este valor na expressão (1), teremos para somma dos trabalhos virtuaes das duas forças :

$$-F\,\delta r$$

Sendo esta expressão nulla quando r é constante, conclue-se *que em todo movimento virtual para o qual a distancia r entre os dous pontos não varie a somma dos trabalhos virtuaes das forças F e F' é igual a zero.*

Tal seria o resultado si os dous pontos se achassem ligados a distancia invariavel um do outro, por uma haste rigida ou ligados por um fio perfeitamente flexivel e inextensivel desde que este fio ficasse inteiramente tendido durante o movimento virtual supposto.

Consideremos agora o caso de um systema constituido por um numero qualquer de pontos. Este systema póde ser livre no seu movimento ou ter um ou mais de seus pontos sujeitos a permanecerem sobre curvas ou superficies fixas ou outras restricções quaesquer. Sejam quaes forem as ligações entre os differentes pontos do systema, ellas são sempre constituidas por pontos materiaes, que fazem parte desse systema, exercendo uns sobre os outros reacções desconhecidas; do mesmo modo o effeito dos obstaculos fixos ou restricções sobre os pontos do systema reduz-se tambem a reacções desconhecidas por elles exercidas; assim, pois, os resultados finaes de taes ligações e restricções são forças desconhecidas que concorrem com as forças motrizes propriamente ditas para manterem o equilibrio do systema, o qual deste modo póde ser concebido como composto de pontos materiaes *livres*, sujeitos á acção das forças dadas que actuam sobre elle, e das reacções desconhecidas provenientes das ligações e das restricções impostas ao mesmo systema. Assim considerado o systema, para que elle fique em equilibrio é necessario que esteja em equilibrio cada um dos seus pontos, e como para o ponto, como vimos, a condição de equilibrio é que a somma dos momentos virtuaes de todas as forças que sobre elle actuam seja igual a zero para qualquer deslocamento virtual, segue-se que formando a equação correspondente a cada ponto e sommando-as, o resultado será a expressão algebrica da condição de equilibrio do systema, a qual em linguagem vulgar consistirá em que *em um systema em equilibrio a somma dos momentos virtuaes de todas as forças, interiores e exteriores que solicitam os seus differentes pontos é nulla para todo movimento virtual do systema.*

Assim formulado este principio pouco ou nada adiantaria por causa das difficuldades da apreciação das forças interiores; semelhante inconveniente, porém, póde ser afastado definindo-se com mais precisão as condições que limitam os movimentos e só considerando os deslocamentos virtuaes

compativeis com essas condições. Procedendo deste mod como vamos ver, é possivel eliminar-se as reacções desco nhecidas e só manter na equação final os momentos virtuae relativos ás forças motrizes propriamente ditas.

Supponhamos, por exemplo, alguns pontos do system ligados entre si por hastes rigidas e indeformaveis ou por fios flexiveis e inextensiveis tendidos em linha recta entre as di versas partes do systema. O movimento virtual do system não alterando a distancia entre dous quaesquer dos pontos d haste sufficientemente proximos para agirem um sobre outro, e sendo estas acções, desconhecidas e reciproca iguaes e directamente oppostas, conforme a lei de Newt segue-se, pelo que já deixamos demonstrado, que a som de seus momentos virtuaes é nulla para o deslocamento v tual considerado e portanto desapparece da equação final momentos virtuaes. O mesmo acontece para o caso do fio ligação, desde que este se mantenha perfeitamente tend durante o deslocamento virtual, isto é, nas suas deformaç os comprimentos dos arcos elementares ficam invariave de sorte que podemos considerar invariaveis as distanc de dous pontos assaz proximos para agirem um sobre outro. Como estas considerações estendem-se a qualquer p de pontos do systema ou das ligações, conclue-se que pa todo movimento virtual do systema, compativel com ess condições de ligação, a somma dos momentos virtuaes d reacções provenientes das ligações é nulla, não figurand assim na equação final. Si o ponto considerado é obrigado permanecer sobre uma curva ou sobre uma superficie fixa para todo movimento virtual do systema, compativel com essa restricções, o deslocamento virtual do ponto será, segund a tangente a curva ou no plano tangente á superficie, de fórm que o momento virtual correspondente á reacção da curv ou da superficie será nullo. Si a superficie de que se trata fa parte do systema, deslocando-se com elle, neste caso a velo cidade virtual do ponto, a qual representaremos por δs, obr

gado a permanecer sobre essa superficie, não será mais perpendicular a reacção normal da superficie, porém será a resultante de uma velocidade desse ponto, tangente á superficie movel e da velocidade proveniente do movimento desta superficie. Substituindo, pois, a velocidade δs pelas suas componentes e projectando estas sobre a direcção normal da reacção, é claro que a projecção da primeira é nulla, ficando δs reduzida somente a projecção da velocidade proveniente do movimento da superficie. Como a pressão do ponto sobre a superficie é igual e contraria á reacção, e sendo a velocidade de seu ponto de applicação precisamente a velocidade do movimento da superficie, resulta que essas duas forças terão momentos virtuaes iguaes e de signaes contrarios, cuja somma será nulla.

Mediante estas considerações, podemos formular o seguinte principio geral: *Para que um systema de pontos materiaes, ligados entre si de uma maneira qualquer e sob a acção de forças quaesquer esteja em equilibrio, é necessario e sufficiente que a somma dos momentos virtuaes dessas forças seja nulla para todo movimento virtual do systema compativel com as ligações e condições a que está sujeito.*

Representando, pois, por P qualquer das forças motrizes por $P\delta s$ o seu momento para o movimento compativel com as ligações, a condição de equilibrio do systema, resultante da somma de todas as condições correspondentes aos differentes pontos desse systema, será algebricamente representada pela equação:

$$\Sigma\,(P\delta s) = o$$

ou, segundo a outra formula obtida:

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta r + Z\,\delta z) = o$$

Tal é a equação geral da statica.

Si as acções mutuas de dous pontos quaesquer do systema não se exercerem a pequenas distancias, taes como

as acções moleculares, porém, a grandes distancias como no caso planetario, em taes casos, embora as forças sejam duas a duas iguaes e contrarias, só excepcionalmente os seus momentos virtuaes se destroem, de modo que é necessario juntal-os á equação geral do equilibrio. O mesmo devemos fazer si o ponto considerado está simplesmente apoiado sobre uma superficie resistente da qual póde afastar-se em certo sentido, ou obrigado a permanecer sobre uma superficie capaz de atrito ou, finalmente, ligado a um outro por um fio elastico. No primeiro destes casos embora o momento virtual da reacção superficial seja nullo para os deslocamentos virtuaes sobre a superficie, não o é para deslocamentos que levem o ponto a afastar-se infinitamente pouco do ponto de apoio, e, sendo assim, para estes ultimos deslocamentos é necessario incluir na equação geral do equilibrio o momento virtual dessa reacção, isto é, é necessario abstrahir da restricção imposta pela superficie e considerar a reacção correspondente como uma força que actua sobre o systema. No segundo caso será necessario juntar á reacção normal cujo momento é nullo para os deslocamentos sobre a superficie, uma reacção tangencial cujo momento não será nullo e deverá, portanto, figurar na equação do equilibrio. No terceiro caso, finalmente, considerando um momento virtual do systema, produzindo a contracção ou extensão do fio elastico, que constitue a ligação, quando mesmo as forças applicadas a esses dous pontos sejam iguaes e contrarias, e a distancia entre elles sufficientemente pequena, a somma dos momentos virtuaes, como demonstramos, não é nulla e deve ser incluida na equação geral.

Como complemento a este estudo sobre as velocidades virtuaes, vamos agora apreciar a importante lei de Lagrange.

Considerando um ponto unico sujeito á condição de permanecer sobre uma curva ou sobre uma superficie, a condição para que elle fique em equilibrio é, como já vimos,

que a resultante de todas as forças que o solicitam seja normal á essa curva ou á essa superficie.

Supponhamos agora em equilibrio um systema constituido por um numero qualquer de pontos, cada um delles sobre a acção de uma unica força ; o equilibrio não será perturbado si fixarmos todos os pontos, a excepção de um delles, e, após isto, supprimirmos todas as forças applicadas aos pontos fixos. Nestas condições teremos apenas a considerar um ponto e a força a elle relativa.

Si, pela natureza do systema, este ponto, uma vez todos os outros fixados, só póde mover-se sobre uma curva ou uma superficie, as suas condições são as mesmas em que se acharia si, isolado, o sujeitassemos a permanecer sobre um obstaculo fixo, e achando-se elle em equilibrio, como se suppõe-se estar o systema, é claro que a força que o solicita deve ser normal á essa curva, ou á essa superficie.

Esta conclusão, convem esclarecer, refere-se á superficie ou á curva que o ponto descreveria si todos os outros, em excepção, fossem fixados, porque no caso em que só se fixasse parte dos outros pontos, não nos seria mais permittido supprimir, como suppuzemos, todas as outras forças do systema, de modo a referir a questão ao caso de um unico ponto sob a acção de uma unica força.

Supponhamos, por exemplo, em equilibrio um systema, constituido por tres pontos A, B e C respectivamente sob a acção das forças F, F_1 e F_2, e ligados entre si de modo que não possam variar suas distancias mutuas.

Considerando A e suppondo que dos dous outros pontos só se fixa C, o ponto A só poderá mover-se sobre a superficie de uma esphera determinada, e neste movimento arrastará o ponto B. Este ponto sendo solicitado por uma força F_1, que não póde ser supposta supprimida porque B não foi considerado fixo, reage sobre o ponto A que assim fica sujeito a duas forças: a reacção de B e a força F. Nestas condições para que o ponto A esteja em equilibrio não é a força F que

deve ser normal á superficie da esphera que elle descreve e sim a resultante dessa força e da reacção de B.

Si porém suppozermos fixos os pontos B e C, neste caso, podemos supprimir as forças F_1 e F_2, de sorte que o ponto A só fica sujeito á acção da força F; e como este ponto só póde, estando os dous outros fixos, descrever um circulo em torno da recta BC, conclue-se rigorosamente que a força F que o solicita, desde que elle é supposto em equilibrio, deve ser normal a esse circulo.

Podemos, pois, formular o seguinte principio:

No equilibrio dos systemas cada força deve ser normal á superficie ou á curva sobre a qual o seu ponto de applicação ficaria sujeito a mover-se si todos os outros pontos fossem considerados fixos.

Tal é o caracter geometrico da lei de Lagrange.

Vejamos agora o seu caracter algebrico.

Para ficar geometricamente definido um systema invariavel de um numero n de pontos, é sufficiente tomarmos tres desses pontos a, b e c e a elles unirmos todos os outros de modo que esses tres pontos ficam constituindo a base commum de muitas pyramides triangulares, cujos vertices serão os outros pontos.

Suppondo uma força applicada em cada ponto do systema, decompondo as forças applicadas aos vertices segundo as tres arestas correspondentes e as forças applicadas em a, b e c em forças iguaes e contrarias ás primeiras segundo as arestas, e em outras; supprimindo-se as forças iguaes e contrarias das arestas, apenas restarão tres forças applicadas aos tres angulos da base, as quaes, no caso de equilibrio do systema, devem poder ser decompostas segundo os tres lados dessa base em forças duas a duas iguaes e contrarias.

Por conseguinte para que se dê o equilibrio do systema é necessario que todas as forças que o solicitam se possam decompor segundo as rectas que unem os seus pontos de

applicação, dous a dous, em forças, duas a duas, iguaes e contrarias segundo cada uma dessas rectas, cujo numero vem a ser (3n — 6).

Esta condição é necessaria no equilibrio de todo e qualquer systema, e quando as distancias mutuas dos pontos do systema considerado são todas invariaveis essa decomposição é sufficiente para o equilibrio, qualquer que seja a proporção das componentes segundo as distancias mutuas dos pontos; quando, porém, essas distancias são uma funcção de seus comprimentos, funcção que deve ficar constante qualquer que seja a posição do systema, neste caso, a decomposição acima referida, embora sempre necessaria, não basta para assegurar o equilibrio do systema, sendo preciso ainda mais para isso, que, de uma recta para outra, entre as forças iguaes e contrarias exista uma certa proporção que depende da natureza da formação proposta.

O modo geral de deduzir essa proporção da formação dada é em que verdadeiramente consiste o caracter algebrico da lei de Lagrange.

Para bem claro tornar o espirito de tão importante concepção, vamos considerar o caso mais simples e mais decisivo, deixando as explicações mais completas para quando tratarmos da estatica.

Supponhamos primeiramente um systema de quatro pontos. As distancias mutuas desses pontos: m, n, p, q, r, s, conforme a explicação geometrica anterior, podem ser concebidas como as arestas de uma pyramide triangular cujos vertices serão esses pontos.

Seja:

$$f(m, n, p, q, r, s) = L = const. \qquad (1)$$

uma formação qualquer das distancias, a qual deve ficar constante qualquer que seja a posição do systema.

Supponhamos uma força applicada a cada ponto do systema e este em equilibrio. Decompondo-se cada uma dessas

forças em tres outras segundo as tres arestas contiguas do seu ponto de applicação, resulta pelo que já ficou dito, que, estando o systema em equilibrio, as duas componentes situadas em cada aresta serão necessariamente iguaes e contrarias, de modo que apenas resta determinar qual a proporção das componentes em torno de cada vertice da pyramide. Para isto supponhamos tres quaesquer dos quatro pontos do systema fixos no espaço, o que de modo algum perturba o equilibrio. Mediante esta hypothese e em virtude da equação (1) o quarto ponto só poderá mover-se sobre uma superficie curva, de sorte que para ser possivel o equilibrio supposto é necessario que a força unica que o solicita seja normal á essa superficie.

Sendo m, n e p as tres arestas que vão ter ao ponto considerado, a superficie que elle é obrigado a descrever, quando todos os outros são suppostos fixos, é dada pela equação:

$$f(m, n, p, q, r, s) = L = const \qquad (2)$$

sendo, m, n, e p consideradas as unicas variaveis.

A normal a esta superficie obtem-se, como sabe-se, pelo calculo differencial, determinando as derivadas de primeira ordem:

$$f'_m(m, n, p, q, r, s), \quad f'_n(m, n, p, q, r, s), \quad f'_p(m, n, p, q, r, s) \qquad (3)$$

da equação (2) em relação a m, n e p; tomando sobre m, n, e p comprimentos respectivamente proporcionaes a essas formações primas e sobre ellas construindo um parallelepipedo, a diagonal deste será a normal procurada.

Ora, devendo a força applicada ao ponto considerado agir segundo a direcção dessa normal, é claro que as suas tres componentes segundo as arestas m, n, e p são necessariamente proporcionaes a essas formações primas. (3)

Raciocinio analogo nos mostraria que no ponto de convergencia das tres arestas m, q, e r, as tres compo-

nentes da força que solicitam esse ponto são proporcionaes ás tres formações.

$$f'_m(m, n, p, q, r, s), f'_q(m, n, p, q, r, s), f'_r(m, n, p, q, r, s),$$

e assim por deante.

Por conseguinte as forças iguaes e contrarias segundo as seis arestas m, n, p, q, r e s são todas proporcionaes ás formações primas:

$$f'_m(m, n, p, q, r, s), f'_n(m, n, p, q, r, s), f'_p(m, n\ldots), f'_q(m, n\ldots,$$
$$f'_r(m, n\ldots), f'_s(m, n\ldots).$$

Fica assim rigorosamente demonstrado que si quatro corpos ou pontos são ligados entre si pela condição de que uma formação qualquer de suas distancias mutuas fica constante, esse systema só póde estar em equilibrio desde que esses corpos ou pontos sejam solicitados uns para os outros, segundo suas distancias mutuas, por forças proporcionaes ás formações primas ou derivadas de 1ª ordem da formação dada, relativamente a essas distancias.

Si a formação (1) não contivesse as seis distancias mutuas, porém sómente algumas dellas, a questão resolver-se-hia do mesmo modo, sendo nullas no resultado as forças segundo as distancias que não figuram na equação dada. Suppondo, por exemplo, que das tres distancias m, n e p do primeiro ponto aos outros só m e n entram na formação (1), a superficie que esse ponto fica sujeito a descrever, quando todos os outros são considerados fixos, será dada pela equação:

$$f(m, n, q, r, s) = const$$

considerando sómente m e n como variaveis, isto é, será uma superficie de revolução em torno da linha que une os dous pontos d'onde partem os raios vectores m e n; de modo

que a normal a esta superficie é simplesmente a diagonal de um parallelogrammo construido sobre duas rectas proporcionaes ás formações f'_m $(m, n, q....)$, f'_n $(m, n, q....)$, tomadas sobre os prolongamentos desses raios vectores. Por conseguinte a força que deve agir segundo a normal a essa superficie decompõe-se inteiramente segundo as distancias m e n em duas outras proporcionaes a f'_m e f'_n, não dando nenhuma componente segundo a distancia p, que não entra na formação.

Si das tres distancias m, n e p, só m entra na formação dada (1), o ponto correspondente a essas distancias só poderá descrever, quando todos os outros forem fixados, uma superficie dada pela equação:

$$f(m, q, r, s) = const$$

sendo m a unica variavel, o que equivale á equação:

$$m = const$$

Essa superficie será, pois, uma esphera, tendo m para raio e, por conseguinte, a linha m lhe será normal, de sorte que a força que deve agir segundo a normal coincide inteiramente com m e suas componentes segundo n e p são nullas. Resulta disto que não póde haver nenhuma acção entre os pontos do systema, segundo suas distancias mutuas, que a formação dada não contenha.

Consideremos agora um numero n qualquer de pontos, e seja:

(4) $$f(m, n, p.....u, v) = L = const$$

a equação entre as suas distancias mutuas, m, n, p, etc. — sendo $(2n-6)$, o numero dessas distancias, ellas podem ser consideradas como representando as arestas de pyramides triangulares successivas, tendo uma base commum; si o numero de distancias for superior devemos eliminar as excedentes ou consideral-as eliminadas por meio das equações

le condição que existem entre rectas que unem pontos lous a dous no espaço.

Isto estabelecido, supponhamos o systema em equilibrio sob a acção de forças respectivamente applicadas aos seus differentes pontos.

Estas forças, como mostrámos, devem poder decompor-se segundo as linhas m, n, p, q, r, etc., em forças duas a duas iguaes e contrarias, e isto feito, trata-se, para conhecel-as, de determinar qual a proporção necessaria de suas componentes.

Consideremos quatro pontos do systema, os quaes representem os angulos de uma das pyramides de que esse systema é supposto constituido, e supponhamos que as suas distancias mutuas sejam as unicas variaveis na equação dada, ficando todas as outras constantes; sendo assim, esses quatro pontos manter-se-hão conjunctamente, como si o systema fosse apenas por elles constituido, ligados entre si pela equação dada, na qual suas distancias mutuas serão variaveis e as demais linhas simples numeros dados. Com effeito, o ponto vertice da pyramide considerada não se acha ligado ás arestas suppostas invariaveis, as quaes assim não o podem influenciar; quanto aos tres pontos da base nos quaes essas arestas veem convergir tres a tres, tambem não podem ser por ellas perturbados, porque, comquanto essas arestas tenham sido, por hypothese, consideradas isoladamente rigidas, comtudo ellas são suppostas moveis em torno de seus pontos de intersecção, que por sua vez são moveis no espaço, o que evidentemente deixa ver que ellas naturalmente acompanharão em seus movimentos os tres pontos para onde convergem, sem influencial-os, seguindo-os em todas as figuras e posições que resultam para o systema, quando suppõe-se variar as distancias mutuas desses pontos nas equações propostas.

Sendo assim, de conformidade com o caso anterior, para o equilibrio particular desses quatro pontos é necessario

34.7684

que elles sejam solicitados uns para os outros por forças proporcionaes ás derivadas de 1ª ordem da formação dada, tomadas em relação ás suas distancias mutuas, e esta proporção deve ser evidentemente a mesma no equilibrio geral do systema, porque supposto o equilibrio desse systema, considerando-se quaesquer das arestas tornadas rigidas e supprimindo desde então todas as forças iguaes e contrarias que se neutralisam segundo essas arestas, o equilibrio existe sempre e, portanto, as forças restantes applicadas ao systema parcial, segundo as arestas ou distancias mutuas, mantidas variaveis, devem necessariamente seguir a lei do equilibrio do systema.

Assim, pois, no momento do equilibrio do systema as componentes contrarias que actuam segundo as arestas de uma qualquer das pyramides são proporcionaes as derivadas de 1ª ordem da formação dada, tomadas relativamente a essas linhas. Ora, em virtude das arestas communs ás pyramides successivas, esta proporção verifica-se de uma aresta a outra, em toda a extensão da figura, de sorte que todos os pontos são necessariamente solicitados uns para os outros segundo suas distancias mutuas m, n, p etc. que entram na formação dada, por forças proporcionaes ás derivadas:

(a) $f'_m(m, n, p \text{ etc.})$, $f'_n(m, n, p \text{ etc.})$, $f'_p(m, n, p \text{ etc.})$ etc. etc.

Prolongando, pois, as linhas m, n, p etc. de quantidades quaesquer todas proporcionaes ás formações (a) a ellas relativas, os comprimentos dessas partes prolongadas representarão as componentes das forças que devem ser applicadas aos pontos respectivos, e a resultante dessas forças em cada ponto representará a força unica que nelle deve ser applicada para ter-se o equilibrio do systema.

Tal é o caracter algebrico da lei de Lagrange cuja generalisação a casos mais complexos faremos na estatica.

Para achar a expressão das forças e assim vermos confirmado o aspecto geometrico dessa lei, o modo mais simples

consiste em procurar, para cada uma dellas, as suas tres componentes parallelas a tres eixos rectangulares.

Sejam x, y, e z as coordenadas do primeiro ponto ; m, n e p etc., as suas distancias aos outros pontos, cujas coordenadas representaremos por :

$$x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''' \text{ etc.}$$

As expressões dessas distancias serão :

$$m \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \qquad n = \left[(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$p = \left[(x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

etc. etc.

Sendo os cosenos dos angulos que as rectas m, n, p etc. formam com o eixo dos x representados pelas derivadas de 1ª ordem das expressões (b) em relação a x, e as componentes segundo essas rectas sendo representadas pelas derivadas (a), resulta que as forças (a) applicadas ao ponto considerado darão parallelamente ao eixo dos x as componentes respectivas seguintes :

$$\frac{f}{m} \times \frac{dm}{dx}, \frac{f}{n} \times \frac{dn}{dx}, \frac{f}{p} \times \frac{dp}{dx} \text{ etc.}$$

as quaes se reduzirão a uma só representada pela somma:

$$\frac{f}{m} \times \frac{dm}{dx} + \frac{f}{n} \times \frac{dn}{dx} + \frac{f}{p} \times \frac{dp}{dx} + \text{etc.}$$

ou, o que é a mesma cousa, á derivada

$$\frac{dL}{dx}$$

da formação dada em relação a x.

Assim, pois, a força applicada ao primeiro ponto terá a sua componente segundo o eixo dos x representada pela derivada de 1ª ordem ou formação prima da formação dada, relativamente á coordenada do ponto correspondente a esse eixo.

De modo analogo obteriamos para as componentes em relação aos eixos dos y e dos z as expressões:

$$\frac{dL}{dy}, \quad \frac{dL}{dz};$$

e como a resultante vem a ser a diagonal do parallelepipedo construido sobre essas tres forças rectangulares, teremos para direcção dessa resultante ou da força que deve solicitar o ponto considerado no caso de equilibrio:

$$(c) \qquad \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

Considerando a superficie representada pela equação $L =$ const. e ahi suppondo como unicas variaveis x, y e z, sabe-se que

$$\frac{dL}{dx}, \quad \frac{dL}{dy} \text{ e } \frac{dL}{dz}$$

são proporcionaes aos cosenos dos tres angulos que faz a normal a essa superficie com os tres eixos, e sendo assim conclue-se que a força (c) é normal á superficie curva que o ponto sobre que ella actua poderia descrever si todos os outros ficassem fixos.

Raciocinando do mesmo modo para com os outros pontos do systema concluiriamos que as forças que os solicitam são proporcionaes ás formações:

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}$$

$$(m) \qquad \sqrt{\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2}$$

etc., etc.

e cada uma dellas normal á superficie curva que o seu ponto de applicação descreveria em virtude da equação $L = const.$, si todos os outros fossem suppostos fixos.

Podemos, pois, formular a lei de Lagrange do seguinte modo:

No equilibrio dos systemas, cada equação de ligação exige que se applique aos pontos desse systema, segundo as suas coordenadas, forças quaesquer proporcionaes ás formações primas dessa equação relativamente ás coordenadas respectivas, e a direcção da resultante dessas forças em cada ponto é normal á superficie que elle descreveria si todos os outros fossem suppostos fixos.

Estas forças representam as resistencias que os corpos deveriam experimentar em virtude de sua ligação mutua ou por parte dos obstaculos que, pela natureza do systema, poderiam oppor-se ao seu movimento, isto é, são as forças interiores que assim podem ser determinadas pela lei de Lagrange.

Convém observar que si o systema é constituido por quatro pontos sómente, para determinar a pyramide de que esses pontos são os angulos, são necessarias suas seis distancias mutuas, e assim não ha nenhuma *equação de condição*; quando, porém, o numero de pontos é maior, ha mais distancias mutuas do que é necessario para assegurar a figura do systema, e então existe entre todas as distancias tantas equações de condição quantas as linhas superfluas.

Póde-se, pois, eliminar ou introduzir na formação (3) as linhas que se queira, uma vez que a combinação daquellas equações o permitta, de sorte a fazer variar as distancias que entram nessa formação e a fórma desta de muitas maneiras.

Ora, conforme as distancias entre as quaes se deseja obter a formação (3), obter-se-ha taes e taes forças segundo essas distancias, e sendo assim, parece plausivel que as forças totaes que resultam para cada ponto tambem não

Assim, pois, a fo
a sua componente seg
derivada de 1ª ordem
relativamente á coord
esse eixo.

De modo analogo
relação aos eixos dos

e como a resultante
construido sobre es-
para direcção dessa
eitar o ponto consid

[illegible]

[illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible]

da entre os n pontos, segundo as suas $(3n - 6)$ utuas, que entram na formação (3), conclue-se, eixamos exposto, que esses pontos agirão uns tros segundo essas distancias m, n, p, etc., na ações :

$$f_m, \quad f_n, \quad f_p, \quad f_q, \quad \text{etc.}$$

ém, ignora-se o modo por que está o systema or- ão será possivel dizer-se pela simples consideração 3) quaes as reacções verdadeiras dos differentes is que não se poderá saber si as ligações que determinar essas acções directas são ou não as ao longo das linhas m, n, etc. que entram na ão da formação (3).

, pois, a formação (3) que, sob qualquer fórma que caracterisa e basta para fazer conhecer immediata- forças unicas (m) que devem ser applicadas aos diffe- ntos, não basta para dar a conhecer o modo como as se distribuem realmente, sendo para isso indispen- siderar ainda a constituição do systema, e ver quaes cias mutuas segundo as quaes a communicação se es- realmente. Si esta communicação realisa-se precisa- gundo as distancias que se apresentam na formação tomar-se-ha immediatamente as formações primas a essas distancias, e ellas representarão as reacções eiras dos differentes pontos ; si, porém, a communica- manifesta-se por intermedio de outras linhas será pre- primeiramente eliminar da formação dada todas as dis- as mutuas ao longo das quaes não ha ligação imme- na construcção do systema, utilisando para isso as ações de condição entre essas linhas ; as derivadas de ordem da formação resultante, em relação ás distancias tuas que restarem, serão as expressões das acções reci- cas que realmente dão-se entre os corpos do systema.

Afim de completar esta exposição do verdadeiro espirito da lei de Lagrange, vamos considerar como faz Poinsot, quem temos seguido, alguns exemplos bem simples.

Supponhamos tres pontos ligados entre si pela condição de que a somma de suas distancias mutuas m, n e p, seja constante.

A formação dada (3) será, neste caso:

$$f(m, n, p) = m + n + p. = const. \quad (e)$$

Tomando as derivadas em relação a m, n e p, resulta:

$$f'_m = 1, \quad f'_n = 1 \quad f'_p = 1$$

Este resultado nos mostra que cada um dos tres pontos deve ser solicitado para os dous outros, no caso de equilibrio do systema, por forças iguaes, de maneira que as tres forças unicas resultantes, que devem actuar sobre elles, são representadas em grandeza e direcção pelas diagonaes dos losangos respectivamente construidos com os mesmos lados nos tres vertices do triangulo que constitue o systema.

Tal é o caso do equilibrio de tres pontos nos quaes passasse como em annéis um mesmo fio inextensivel e incompressivel ao longo do qual elles pudessem livremente escorregar. Quando estes pontos movem-se de modo que o fio fique sempre tendido, a somma de suas distancias mutuas fica constante, de conformidade com a equação (e), e cada um desses pontos, desde que se considere os outros dous fixos, só poderá mover-se sobre um ellipsoide de revolução cujos fócos serão os dois pontos considerados fixos. Dahi a razão por que cada uma das forças applicadas divide em duas partes iguaes o angulo formado pelas distancias de seu ponto de applicação aos dois outros pontos do systema, pois que devendo essa força ser normal á superficie do ellipsoide, nesta superficie a normal divide em duas partes iguaes o angulo formado pelos raios vectores.

Si sómente a somma de duas das distancias m e n, exemplo, fôr considerada constante, isto é, si a formação d for:

$$f(m, n) = m + n = \text{const.}$$

teremos:

$$f'_m = 1, \; f'_n = 1.$$

Em tal hypothese será necessario applicar aos dous p meiros pontos forças iguaes, segundo as suas distancias m, ao terceiro ponto, e a este uma força igual e contraria á res tante das duas primeiras, não havendo assim força segu a distancia p que não entra na equação dada.

Este caso é o que se nos apresenta no systema constitu por tres pontos A, B e C ligados por um fio inextensive inflexivel ao longo do qual um delles A, por exemplo, p livremente escorregar emquanto que os dous outros são gados ás extremidades. Nestas condições, suppondo-se B fixos, o ponto A só poderá mover-se sobre um ellipsoide revolução, tendo B e C como fócos; si suppozermos A e dos outros dous pontos, B, por exemplo, fixos o ponto C poderá mover-se sobre uma esphera tendo A como centr mesmo acontecerá para B si suppozermos fixos A e C. T a razão por que a força applicada ao ponto que póde escorre ao longo do fio divide em duas partes iguaes o angulo mado pelas linhas m e n, emquanto que cada uma das d outras forças actua sobre o ponto central A, segunda direc dessas linhas.

Consideremos, por ultimo, a formação dada da fórma

$$f(m, n, p \text{ etc.}) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \text{etc.} = \text{const.}$$

Tomando as derivadas, temos:

$$f'_m = -\frac{1}{m_2}, \; f'_n = -\frac{1}{n_2}, \; f'_p = -\frac{1}{p_2}, \text{ et}$$

Como veremos as expressões de X_1, Y_1 e Z_1 são:

$$X_1 = \frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad Y_1 = \frac{d^2y}{dt^2}\ ,\quad Z_1 = \frac{d^2z}{dt^2}$$

donde resulta:

$$\Sigma\left[m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + m\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = o$$

Esta equação resume toda a dynamica do mesmo modo que a equação:

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = o$$

resume toda a estatica.

Tal é o modo como o admiravel genio de Lagrange condensou em duas equações toda a mecanica geral.

CALCULO DAS VARIAÇÕES

No estudo que acabamos de fazer fomos levados a considerar os espaços infinitamente pequenos descriptos pelos pontos de um corpo e as modificações correspondentes das coordenadas quando esse corpo era supposto deslocando-se para tomar uma posição infinitamente proxima; a importancia destas grandezas auxiliares, denominadas *variações* e caracterisadas algebricamente pelo signal δ, exige uma apreciação detalhada, quer quanto á sua natureza, quer ao modo por que são ellas utilisadas no calculo, e é este o objecto desta ultima parte do preambulo.

Consideremos a formação geral:

$$y = f(x); \qquad (1)$$

Suppondo-a representando a equação de uma curva, conterá ella as cordenadas x e y de um ponto qualquer da curva e os parametros que definem a natureza e a situação da

fórma alli representada. Si mantivermos esses parametros constantes, e fizermos variar x, resultarão valores para y, os quaes com os seus correspondentes de x constituirão as coordenadas dos differentes pontos da curva.

Si x e y são, por exemplo, as coordenadas de um ponto m, dando a x um accrescimo a e designando por y_0 o valor correspondente de y, as coordenadas y_0 e $x + a$ determinarão um segundo ponto da mesma curva, tanto mais proximo do primeiro m, quanto menor for o accrescimo a. Ora, considerando o accrescimo a um infinitamente pequeno dx, as coordenadas do ponto m' serão $(x+dx)$ e $f(x+dx)$, e este achar-se-ha infinitamente proximo de m, de maneira que, sem erro sensivel, podemos suppor rectilineo o arco comprehendido pelos dous. Formuladas quaesquer propriedades da curva mediante esta simplificação da fórma do seu elemento infinitesimal, e as variações infinitamente pequenas das coordenadas, as relações que as traduzem conterão necessariamente taes grandezas auxiliares e, desde então, a questão consistirá em eliminar essas auxiliares para que as relações sejam referidas aos elementos reaes de cada questão.

Tal é o espirito e o objecto geral do methodo e do calculo de Leibnitz.

Sob este ponto de vista considerada a equação (1), supponhamos que um ponto m da curva descreve um dos seus elementos infinitesimaes rectilineos e passa a occupar a posição m'; este deslocamento produz para a abcissa x' do ponto m um accrescimo que designaremos por dx e este substituido em (1) nos dará para o accrescimo da ordenada: $f(x + dx) - f(x)$ ou, como sabe-se, dy. Assim, pois, as differenciaes dx e dy das coordenadas podem ser concebidas como provenientes do deslocamento infinitamente pequeno de um ponto da curva *sobre essa mesma curva*. O mesmo se daria si considerassemos uma superficie:

$$z = f_1(x, y) \qquad (2)$$

O deslocamento infinitamente pequeno de um ponto dessa superficie sobre a propria superficie determina um accrescimo infinitesimal para x e y, os quaes addicionados a estas variaveis e as sommas substituidas na equação (2), e do resultado subtrahida a equação primitiva, nos darão o accrescimo correspondente de z.

Phenomenos ha, porém, cuja meditação nos leva naturalmente a considerar os deslocamentos dos pontos de uma curva ou de uma superficie como realisando-se fóra dessa curva ou dessa superficie.

Consideremos, por exemplo, no espaço um fio flexivel preso pelas extremidades a dous pontos fixos e sujeito á acção de uma força F. A fórma primitiva do fio modifica-se, e isto até que elle tome a fórma compativel com equilibrio sob a influencia de força F. Imaginando solidificada no espaço a fórma primitiva, podemos conceber a fórma definitiva como tendo resultado de uma deformação gradual da primeira, de sorte que cada ponto da figura inicial descreva um certo espaço para passar da primeira á segunda posição. Estes deslocamentos dos differentes pontos da curva primitiva para passarem á segunda curva, determinam nas coordenadas correspondentes, modificações que serão tanto menores quanto mais proximas acharem-se as duas figuras da curva. Si a fórma primitiva achar-se infinitamente proxima da forma de equilibrio, o deslocamento dos pontos serão infinitamente pequenos e do mesmo modo as modificações provenientes para as coordenadas.

Seja agora um corpo P compressivel representado no espaço e referido a tres eixos coordenados, e consideremos um ponto m de sua superficie. Imaginando P submettido á acção de forças que o mantenham em equilibrio, a fórma P modifica-se sob a pressão das forças até adquirir a fórma P' compativel com o equilibrio. Suppondo a fórma P fixada no espaço, a fórma P' póde ser considerada

como proveniente de uma deformação successiva da fórma P de modo que cada ponto da superficie P descreve um certo espaço passando dessa superficie para a superficie P'. Em virtude deste deslocamento as coordenadas do ponto m, relativas á primeira figura da superficie, soffrem uma modificação, e esta será tanto menor quanto menor for a distancia necessaria para passar de P a P'. Considerando esta distancia infinitamente pequena, os deslocamentos dos pontos, bem como as modificações correspondentes das coordenadas, serão tambem infinitamente pequenos.

Estas considerações fazem naturalmente surgir a idéa de conceber as modificações infinitamente pequenas das coordenadas de uma curva ou de uma superficie, como devidas não mais ao deslocamento do ponto sobre a mesma curva ou superficie, porém ao deslocamento do ponto passando dessa curva ou superficie para uma outra infinitamente proxima; a estes deslocamentos e modificações infinitamente pequenas, novas auxiliares para o calculo, denominou Lagrange *variações*.

Vejamos agora o que determina esta concepção sob o ponto de vista do calculo.

Nas equações (1) e (2) desde que suppozermos constantes os parametros e fizermos variar, na primeira x e na segunda x e y, de quantidades infinitamente pequenas, os valores correspondentes de y e z irão definindo os differentes pontos da curva ou da superficie de conformidade com a constituição infinitesimal; sob este aspecto o calculo de Leibnitz desenvolveu todos os recursos que se podiam tirar, e mesmo esgotou a questão, por conseguinte a concepção das variações deve sob o ponto de vista algebrico, referir-se, necessariamente, á modificação do outro elemento constitutivo das equações: os *parametros*.

Realmente, as variações sendo representadas pelos deslocamentos infinitamente pequenos dos pontos de uma linha ou de uma superficie, quando esses pontos passam dessa

linha ou superficie para uma outra infinitamente proxima, é claro que, sob o ponto de vista geometrico, a imagem alterou-se ou quanto a sua fórma, ou quanto a sua situação, ou quanto as duas simultaneamente, conforme a segunda curva ou superficie tiver a mesma situação da primeira apenas deformando-se, ou apresentar a mesma fórma simplesmente deslocada ou, finalmente, apresentar uma fórma e situação differentes da primeira. Ora, nas equações (*1*) e (*2*) os elementos que definem a situação e a fórma da curva ou superficie são os parametros ligados as coordenadas por um determinado modo de relação, por conseguinte, si a curva ou superficie modifica-se ou de fórma ou de situação, os parametros necessariamente variam, e, reciprocamente, si os parametros variam as imagens geometricas modificam-se ou de fórma ou de situação ou ao mesmo tempo de fórma e situação, conforme os parametros affectados.

Para deixar bem clara esta influencia mutua entre as imagens geometricas e os parametros caracteristicos da imagem algebrica, e ficar assim bem comprehendida a differença entre a *variação* e a *differencial*, vamos considerar alguns exemplos muito simples.

Seja :

$$y = b + ax \qquad (1)$$

a equação da recta AB fig. (17).

Supponhamos o ponto m dessa recta deslocando-se sobre ella e percorrendo um espaço $m\ m'$ infinitamente pequeno ds. Em virtude deste deslocamento as coordenadas x e y desse ponto soffrem os accrescimos ss' e $m'n$, tambem infinitamente pequenos; estes accrescimos são as differenciaes dx e dy das coordenadas, e ds a differencial do espaço. Substituindo na equação (*1*) x e y por

$$(x + dx) \text{ e } (y + dy)$$

a ordenada do segundo ponto m' será :

$$y + dy = b + a\,(x + dx)$$

Subtrahindo desta relação a relação (*1*), teremos :

$$dy = adx$$

Não figurando neste valor a differencial do espaço ou o deslocamento $m\,m'$, porém sómente o deslocamento segundo o eixo das abcissas, podemos considerar a differencial de y como directamente produzida por um accrescimo infinitamente pequeno recebido pela abcissa e deste modo suppor x a variavel livre, e, portanto, constante a sua differencial dx. D'ahi, sob o ponto de vista puramente abstracto, as regras fundamentaes para a differenciação.

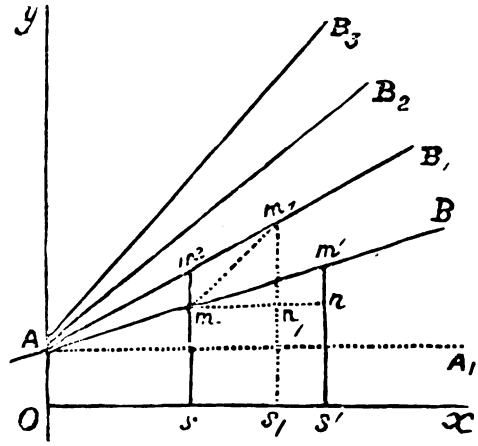


Fig. 17

Consideremos agora a questão relativamente as variações.

Supponhamos a recta AB deslocando-se e indo coincidir com AB_1, della infinitamente proxima. Em virtude deste deslocamento o angulo BAA_1, soffre um accrescimo infinitamente pequeno BAB_1, o que leva cada ponto da recta AB a descrever um certo espaço para ir ficar sobre a recta AB_1.

Seja m o ponto considerado e supponhamos mm_1 o espaço por elle descripto para occupar a posição m_1. Este deslocamento infinitamente pequeno mm_1 do ponto m produz nas suas coordenadas os accrescimos tambem infinitamente pequenos $m_1 n_1$ e ss_1. A modificação, pois, da situação da linha AB determina uma modificação no angulo BAA_1, e por conseguinte no parametro a da equação (1), que representa a tangente desse angulo e, reciprocamente, se modificarmos na equação (1) o parametro a a recta AB deixará sua posição para ir coincidir com uma outra cuja imagem algebrica será representada por aquella equação contendo o parametro a modificado; deste modo, alterando gradualmente o parametro a podemos fazer com que a recta AB vá coincidindo com uma infinidade de rectas AB_1, AB_2 AB_3, etc. Desde que essas rectas consideradas acham-se infinitamente proximas uma da outra os accrescimos recebidos pelo angulo BAA_1 na passagem de uma a outra posição, o espaço percorrido $m\ m_1$ pelo ponto, e os accrescimos $m_1\ n_1$ e ss_1 de x e y serão infinitamente pequenos e constituirão as variações δa, δs, δx e δy do parametro, do espaço e das coordenadas. Si o angulo BAA_1 adquire o valor 90°, a equação (1) nos dá

$$a = \infty\ ,\ e\ x = o$$

equação do eixo dos y; si o angulo torna-se igual a zero temos

$$a = o,\ y = b,$$

equação de uma recta AA_1 parallela ao eixo dos x. Assim, pois, mantendo na equação (1) a como um parametro arbitrario podemos representar por essa equação a infinidade de rectas comprehendidas entre AY e AA_1, valores limites correspondentes aos valores 90 e 0 do parametro a. Si essa equação é supposta relativa, por exemplo, a uma dessas rectas AB_1, para passarmos á recta infinitamente proxima AB_2, basta-nos na equação (1) suppor ao parametro a uma variação δa.

A variação, por conseguinte, indica sempre que se passa de uma das linhas para outra infinitamente proxima.

Si na passagem da recta da situação AB para a situação AB_1 a variação do ponto m ou m m_1 é perpendicular ao eixo dos x, isto é, si m descreve a recta mm_2, neste caso a ordenada será a unica a variar e então x póde ser considerada constante.

No exemplo que acabamos de considerar a linha muda simplesmente de posição, sem variar de fórma; vamos agora apreciar um outro em que ella varia de fórma, podendo tambem mudar ou não de posição.

Seja:

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 - 2 A^2 by + A^2 (b^2 - B^2) = o \qquad (1)$$

a equação de uma ellipse referida a seus eixos e situada a uma distancia b sobre o eixo dos y, e $EME'E$ a imagem geometrica correspondente. Fig. (18).

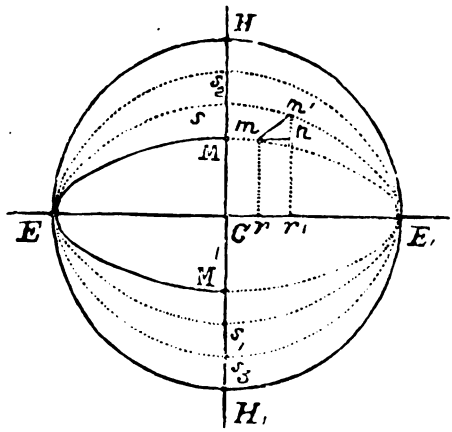


Fig. 18

Imaginando essa curva deformando-se e indo coincidir com a ellipse $EsE's_1E$, em virtude desta deformação o semi-eixo CM receberá um accrescimo Ms e os pontos da primeira ellipse descreverão um certo espaço para passarem á

segunda. Seja m um desses pontos, x e y suas coordenadas e mm' o espaço por elle percorrido quando a primeira ellipse deforma-se e vai coincidir com a segunda. Este deslocamento do ponto m, passando de uma para outra curva, produz por sua vez modificações $m'n$ e mn, nas coordenadas, tanto menores quanto menor for o espaço descripto mm', de modo que a deformação da curva importa uma modificação no semi-eixo CM, isto é, no parametro B da equação (1), e a modificação deste parametro tem como consequencia o deslocamento do ponto m para m' e conseguintemente as modificações $m'n$ e mn de x e de y.

Suppondo-se a ellipse $Es\,E's_1\,E$ deformando-se e indo coincidir com a ellipse $Es_2\,E's_3\,E$, o semi-eixo soffrerá um outro accrescimo ss_2, o ponto m' descreverá um certo espaço para passar da 2ª á 3ª curva, e esta determinará accrescimos correspondentes nas coordenadas $(x + mn)$, e $(y + m'n)$, e assim por deante para todas as outras ellipses.

Por conseguinte a modificação da fórma importa uma modificação do parametro na imagem algebrica correspondente e, reciprocamente, si modificarmos o parametro B da equação (1) a imagem geometrica deforma-se; de maneira que as modificações que resultam para as coordenadas, em virtude das modificações do parametro, são sempre relativas a uma curva diversa da representada pela equação primitiva.

Si a primeira ellipse achar-se infinitamente proxima da segunda, esta infinitamente proxima da terceira, etc., os accrescimos recebidos pelo semi-eixo ou o parametro B bem como o espaço percorrido pelo ponto e as modificações correspondentes de x e y serão infinitamente pequenas, e então Ms, mm', $m'n$, mn representarão respectivamente as variações δB, δs, δy, δx, do parametro, do espaço percorrido e das coordenadas.

Suppondo $B = A$, a equação (1), nos dá:

$$(y - b)^2 + x^2 = A^2 \qquad (2)$$

A va[illegible] $E'E$; suppondo $B = o$ resulta:

de uma[illegible]

$$y = b \qquad (3)$$

Si [illegible]

AB_1 a[illegible] parallela ao eixo dos x.

eixo [illegible] na equação (1) o parametro B

a ori[illegible] O até A, essa equação comprehen-

dera[illegible], isto é, o circulo e a linha recta,

[illegible] comprehendidas entre essas duas

sim[illegible] passagem de um ponto de uma dessas

apr[illegible] obtida pela variação do parametro

be[illegible] equação (1) relativa a ellipse $EME'E$,

[illegible]rmos passar para uma outra infinita-

[illegible]remos nessa equação uma variação δB

[illegible] variações resultantes para as coordenadas

[illegible] uma outra curva differente da representada

[illegible]itiva. No caso de ser o deslocamento do

[illegible] ou sua variação perpendicular ao eixo

[illegible] do parametro só influirá sobre a ordenada

[illegible] x póde ser considerado constante.

[illegible] estas considerações de um modo geral. Si

[illegible] linhas cujas equações sejam:

$$y = f(x), \; y = f_1(x) \qquad (1)$$

[illegible]el-as em uma unica imagem algebrica re-

[illegible] pela equação:

$$y = F(x, \alpha) \qquad (2)$$

[illegible] um parametro arbitrario α, o qual para os valores

[illegible] $\alpha = \alpha_1$ reduz a equação (2) respectivamente as

[illegible] (1). Si fizermos variar na equação (2) o parametro

[illegible] limites α_1 e α_2 teremos uma infinidade de curvas,

[illegible] podem ser consideradas como provenientes da

[illegible]ação gradual de uma dellas, e a passagem de uma

[illegible] curvas para outra infinitamente proxima obtem-se

[illegible]ando-se na equação (2) uma variação $\delta\alpha$ ao parametro α.

Desta exposição resulta que para *variar* uma formação as regras são as mesmas que para differencial-a, applicadas, porém, sob o ponto de vista de hypotheses differentes. Differenciando a equação de uma curva, as relações differenciaes que resultam referem-se a essa mesma curva, a operação não alterando o modo de relação entre x e y, supposto sempre o mesmo; *variando* a mesma equação os resultados obtidos são relativos a uma curva diversa da primeira, pois variação do parametro, ahi considerado variavel livre, e que póde não entrar na constituição da equação, modifica o modo de relação entre x e y, e, portanto, como vimos, a imagem geometrica correspondente. No primeiro caso o crescimo dx, podendo ser considerado independente do crescimo dy, póde ser supposto constante; no segundo a variação do parametro fazendo variar em geral x e y, x não deve ser supposto livre e portanto δx constante.

Assim, pois, embora as regras sejam as mesmas os resultados são differentes.

Conforme o que dissemos, si a variação do ponto é supposta perpendicular ao eixo dos x só a ordenada y varia devendo neste caso x ser considerado constante; si é obliqua x e y variarão com o parametro. Sobre qualquer destas hypotheses póde ser feita a variação da expressão considerada convindo adoptar a segunda como mais geral e mesmo porque dos seus resultados podemos obter os resultados proprios a primeira hypothese, suppondo nullos os termos effectos das variações relativas a coordenada constante.

No calculo de Leibnitz a operação da integração é inversa da operação da differenciação, isto é, a expressão $\int V dx$ é igual a $V dx$; no calculo de Lagrange não acontece o mesmo, si tivermos $\delta \int V dx$, o resultado não póde ser $V dx$, pois que a variação $\delta \int V dx$ refere-se a uma curva differente daquella a que é relativa $V dx$.

A operação da *variação* póde, pois, concorrer no calculo com a differenciação e a integração, de modo que torna-se

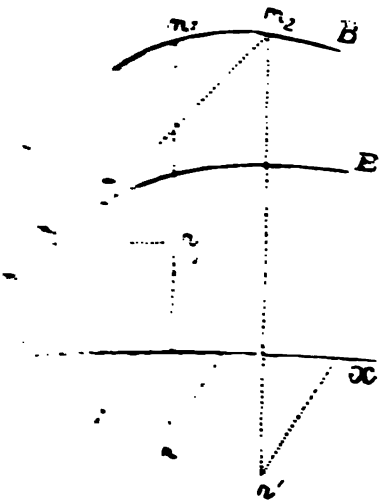
equação do circulo $E\,H\,E'\,I$

$y =$

equação da recta CC' paral

Si, pois, considerarm
arbitrario e variando de
derá as equações (2) e (3),
bem como todas as ellips
fórmas extremas. A pa
curvas para outra, sendo
E, si suppozermos a e
por exemplo, e quizerm
mente proxima, suppor
ao parametro, e as vari
referir-se-hão a uma
pela equação primitiv
ponto m para m ou
dos x, a variação do p
e nesta hypothese x

Formulemos est
varamos duas linha



podemos abrangel
representada pela e

duas regras
concurrencia.
dos signaes
na transposição
gração.
presentemos essa
de uma curva
. Supponhamos

com a curva
o espaço
deslocamento
uma variação cuja ex-

n_1 e n_2 — F

... curva $A\ B$ o ponto m passando para a ... mente proxima, o calculo differencial

$$d\ m\ s = m'\ s' - ms$$

$$d\ F = m'\ s' - F$$

... variação desta expressão :

$$\delta\ d\ F = \delta\ m'\ s' - \delta\ F$$

... $\delta\ F$ por seu valor (1) :

$$\delta\ d\ F = \delta\ m'\ s' - m_1\ n + F \qquad (2)$$

...mos agora que o ponto m', quando a curva ... posição $A'\ B'$, descreve o espaço infinitamente ... m_2. Em virtude deste deslocamento a ordenada ... uma variação cuja expressão é :

$$\delta\ m'\ s' = m_2\ n' - m'\ s'$$

... tituindo este valor em (2), resulta :

$$\delta\ d\ F = m_2\ n' - m'\ s' - m_1\ n + F \qquad (3)$$

... curva $A'\ B'$ supponhamos o ponto m_1 descrevendo o ... infinitamente pequeno $m_1\ m_2$, o calculo differencial ... :

$$d\ m_1\ n = m_2\ n' - m_1\ n$$

Substituindo no primeiro membro $m_1\ n$ por seu valor ... de (1) temos :

$$d\ (\ F + \delta\ F\ ) = m_2\ n' - m_1\ n$$

Sendo :

$$d\ F = d\ ms = m'\ s' - F$$

si subtrahirmos esta relação da anterior, resulta :

$$d(F + \delta F) - dF = m_2 n' - m_1 n - m' s' + F$$

ou

$$d\delta F = m_2 n' - m_1 n - m' s' + F$$

Comparando esta expressão com a relação (3) temos :

$$\delta d F = d \delta F$$

Si a expressão dada fosse da fórma $f(x)$, a representariamos pela ordenada y, de uma curva referida a dous eixos e por uma marcha inteiramente analoga a anterior chegariamos á conclusão seguinte :

$$\delta d y = d \delta y$$

Por conseguinte *a differencial da variação de uma formação é igual variação da differencial dessa formação.*

2.ª Seja a expressão dada

$$\int F$$

sendo F uma formação de x, y e das differenciaes dx, d^2x etc.

Representando esta integral por V, resulta :

$$\int F = V \qquad (1)$$

Differenciando esta expressão temos:

$$F = dV$$

tomando a variação desta igualdade:

$$\delta F = \delta dV$$

ou, conforme a primeira regra :

$$\delta F = d\delta V$$

integrando :

$$\int \delta F = \int d\delta V = \delta V$$

Substituindo V por seu valor (1), temos:

$$\int \delta F = \delta \int F$$

isto é, *a integral da variação de uma formação é igual a variação da integral dessa formação.*

Isto estabelecido supponhamos que pelo calculo differencial chegamos a formular para uma curva certa propriedade representada pela formação:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right)dx$$

Integrando esta expressão, a integral:

$$\int F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right)dx \qquad (1)$$

desde que não se especifique o modo de relação entre x e y, isto é, desde que não se dê a equação da curva, exprimirá uma propriedade geral a todas as curvas, pois que a formula F foi estabelecida suppondo-se a curva composta de elementos infinitesimaes rectilineos, e sob este aspecto taes elementos são os mesmos seja qual for a natureza da curva.

Supponhamos que se procura determinar para qual das curvas comprehendidas entre dous limites a e b, por exemplo, a propriedade expressa na integral (1) é um maximum ou um minimum.

Sejam x e y ligados pela relação hypothetica.

$$f(x,\ y,\ \alpha) = o \qquad (2)$$

sendo α um parametro arbitrario.

Esta equação poderá representar todas as curvas comprehendidas entre a e b, bastando para isso suppormos variações ao parametro α, pois que estas variações fazendo variar ao mesmo tempo x e y modificam o modo de relação da

equação (2) isto é, a equação da curva (2), e esta equação assim modificada irá representando as equações das differentes curvas entre os limites a e b, as quaes podem ser supposstas provenientes da deformação de uma dellas em consequencia das convenientes variações do parametro.

A questão ficará assim reduzida a procurar-se qual é na equação (2) o modo de dependencia entre x e y que torna um maximum ou um minimum a integral $\int_a^b F\,dx$.

Suppondo, pois, que α varia na equação (2), y e x tambem variarão e essas variações determinarão para F uma outra correspondente δF. E' preciso notar que a variação de F é tomada suppondo-se as variações de x e y determinadas por uma variavel α que não entra na constituição dessa formação, e ainda mais que para tomar essa variação não precisamos conhecer o modo de dependencia entre x e y, bastando suppor entre si ligadas essas duas variaveis.

Recebendo F uma variação δF, teremos :

$$\int_a^b \delta F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\ldots\ldots\right)dx \tag{3}$$

Sendo y supposto formação de x, F tambem o será e como nas proximidades do maximum ou minimum uma grandeza mantem-se estacionaria, conforme a observação de Kepler, resulta que :

$$\delta F dx = o$$

para os casos de maximum e minimum.

Por conseguinte a condição de existencia de qualquer destes estados criticos para a integral (3) será :

$$\int_a^b \delta F dx = o$$

ou

$$\delta \int_a^b F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\ldots\ldots\right) dx = o \tag{4}$$

Ora, como a variação de F provêm das variações de x e y em consequencia da variação de α, desde que a variação de F é nulla para todos os pontos de uma das curvas comprehendidas entre a e b, como indica a expressão $\int_a^b \delta F dx = o$ isso importa em que os pontos dessa curva não podem mais variar e, portanto, que o modo de relação entre x e y mantem-se fixo, isto é, a curva correspondente ao estado critico fica determinada, não podendo mais modificar-se para confundir-se com qualquer das outras comprehendidas entre os mesmos limites.

Na expressão (4), pois, deve achar-se necessariamente comprehendida a equação daquella curva, e é isto o que as applicações que adeante fazemos, hão de tornar bem claro, pois ahi veremos da traducção algebrica do maximum ou minimum deduzir-se uma equação differencial que uma vez integrada nos dará a equação da curva relativa ao estado maximum ou minimum da propriedade considerada, equação essa apenas hypotheticamente representada pela expressão (2).

Tal é, de uma maneira geral, a natureza dos problemas cuja solução exigio a creação do calculo das variações.

Como vimos, sob o ponto de vista algebrico, a questão fundamental consiste em determinar-se a variação de uma integral da fórma $\int F$, sendo F uma expressão differencial cuja constituição dá logar aos differentes casos que passamos a considerar:

1.º Determinar a variação da integral:

$$\int F(x, y, dx, d^2x \ldots dy, d^2y \ldots)$$

sendo F uma formação de x, y e suas differenciaes de differentes ordens.

Conforme a segunda regra temos:

$$\delta \int F = \int \delta F \qquad (1)$$

Determinemos, pois, a variação de F.

A differencial desta formação é :

$$d\,F = M\,dx + N\,d.\,dx + P\,d\,d^2x + Q\,d,\,d^2x + etc. + M_1\,dy + \\ + N_1\,d.\,dy + P_1\,d.\,d^2y + Q_1\,d.\,d^2y + etc.$$

Para obtermos a sua variação basta-nos substituir a operação da differenciação effectuada e ahi representada pelo primeiro signal d pela operação da variação caracterisada por δ ; teremos assim :

$$\delta\,F = M\,\delta x + N\,\delta\,dx + P\,\delta\,d^2x + Q\,\delta\,d^3x + etc. + M_1\,\delta y + \\ + N_1\,\delta\,dy + P_1\,\delta\,d^2y + Q_1\,\delta\,d^3y + etc.$$

Substituindo este valor na expressão (1), resulta :

$$\delta\int F = \int M\,\delta x + \int N\,\delta\,dx + \int P\,\delta\,d^2x + \int Q\,\delta\,d^3x + \\ + etc. + \int M_1\,\delta y + \int N_1\,\delta\,dy + \int P_1\,\delta\,d^2y + \\ + \int Q_1\,\delta\,d^3y + etc. \qquad (2)$$

Esta expressão póde ser simplificada fazendo-se desapparecer do signal de integração os termos affectos do duplo signal δ e d.

Para obter isto recorre-se ao processo de integração por partes applicado repetidas vezes, simultaneamente com a primeira regra anteriormente estabelecida.

Praticando esse processo, teremos :

$$\int N\,\delta\,dx = \int N\,d\,\delta x = N\,\delta x - \int \delta x\,d\,N$$

$$\int P\,\delta\,d^2x + \int P\,d^2\,\delta x = P\,d\,\delta x - \int d\,\delta x\,d\,P = P\,d\,\delta x - \\ - d\,P\,\delta x + \int \delta x\,d^2\,P$$

$$\int Q\,\delta\,d^3x = \int Q\,d^3\,\delta x = Q\,d^2\,\delta x - \int d^2\,\delta x\,d\,Q = Q\,d^2\,\delta x - \\ - d\,\delta x\,d\,Q + \int d\,\delta x\,d^2\,Q = Q\,d^2\,\delta x - d\,\delta x\,d\,Q + \delta x\,d^2\,Q - \\ - \int \delta x\,d^3\,Q$$

e assim por deante.

Procedendo do mesmo modo obteriamos em relação a y :

$$\int N_1 \, \delta \, dy = N_1 \, \delta y - \int \delta y \, d \, N_1$$

$$\int P_1 \, \delta \, d^2 y = P_1 \, d \, \delta y - d \, P_1 \, \delta y + \int \delta y \, d^2 \, P_1$$

$$\int Q_1 \, \delta \, d^3 y = Q_1 \, d^2 \, \delta y - d \, \delta y \, d \, Q_1 + \delta y \, d^2 \, Q_1 - \int \delta y \, d^3 \, Q_1$$

e assim por deante.

Substituindo estes valores em (2), resulta :

$$(A) \; \delta \int F = (N - d \, P + d^2 \, Q - etc.) \, \delta x + (P - d \, Q + \\ + etc.) \, d \, \delta x + (Q - etc.) \, d^2 \, \delta x + etc. + (N_1 - d \, P_1 + d^2 \, Q_1 - \\ - etc.) \, \delta y + (P_1 - d \, Q_1 + etc.) \, d. \, \delta y + (Q_1 - etc.) \, d^2 \, \delta y + \\ + etc. + \int (M - d \, N + d^2 \, P - d^3 \, Q + etc.) \, \delta x + \int (M_1 - d \, N_1 + \\ + d^2 \, P_1 - d^3 \, Q_1 + etc.) \, \delta y.$$

Apreciando este resultado vemos que elle compõe-se de duas partes semelhantes : uma devida a variação de x e outra a variação de y ; de modo que si a formação F contivesse além de x e y mais variaveis teriamos, para obter a expressão correspondente, de juntar a este resultado termos semelhantes aos provenientes de x ou de y.

Suppondo na expressão (A) :

$$(3) \qquad \begin{cases} M - d \, N + d^2 \, P - d^3 \, Q + etc. = o \\ M_1 - d \, N_1 + d^2 \, P_1 - d^3 \, Q_1 + etc. = o \end{cases}$$

a expressão da variação $\delta \int F$ ficará contendo só termos integrados, e as relações (3) representarão assim as condições para que a formação F seja integravel por si mesma.

Realmente se F é um differencial exacta $d \, \varphi$, $\delta \, F$ será tambem differencial exacta, porque então

$$F = d \, \varphi$$

d'onde

$$\delta \, F = \delta \, d \, \varphi = d \, \delta \, \varphi.$$

Por conseguinte si na expressão de $\int \delta F$ reduzirmos o signal de integração a só affectar termos que não possam ser integrados, no caso de ser F uma differencial exacta, o conjuncto destes termos deve ser nullo, pois que então δF tambem é uma differencial exacta. Reciprocamente, formulando a nullificação do termo affecto da integração na expressão $\int \delta F$, as relações que resultam traduzem as condições de integrabilidade da formação F.

Si a formação F contivesse mais uma variavel z, por exemplo, a differencial da formação seria:

$$\delta F = M\, dx + N\, d^2x + etc. + M_1\, dy + N_1\, d^2y + etc. + M_2\, dz + \\ + N_2\, d^2z + P_2\, d^2z + etc.$$

Os termos, pois, a juntar á nossa formula, correspondentes a esta nova variavel serião:

$$\int (M_2 - d\, N_2 + d^2 P_2 - d^3 Q + etc.)\, dz + (N_2 - d\, P_2 + \\ + d^2 Q_2 - etc.)\, \delta z + (P_2 - d\, Q_2 + etc.)\, d\, \delta z + etc.$$

e assim para o caso de mais outras variaveis.

2.º — Determinar a variação da integral

$$(2) \qquad \int F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3} \ldots\right) dx$$

em que F é uma formação de x, y e de seus coefficientes differenciaes.

Conforme a segunda regra temos:

$$\delta \int F\, dx = \int \delta\, (F\, dx)$$

Porém a variação do producto $F\, dx$, nos dá, conforme os principios da differenciação:

$$\delta\, (F\, dx) = F\, \delta\, dx + dx\, \delta\, F = F\, d\, \delta x + dx\, \delta\, F$$

Substituindo em (3) :

$$\delta \int F\, dx = \int F\, d\, \delta x + \int \delta\, F.\, dx$$

Porém a integração por partes nos dá:

$$\int F\, d.\, \delta x = F\, \delta x - \int \delta x\, d\, F$$

d'onde:

$$\text{(a)} \qquad \delta \int F\, dx = F\, \delta x + \int (\, dx\, \delta\, F - d\, F.\, \delta x\,)$$

Calculemos, pois, a differença

$$dx\, \delta F - dF\, \delta x.$$

A differencial de F é:

$$dF = C\, dx + C_1\, dy + C_2\, d\, \frac{dy}{dx} + C_3\, d\, \frac{d^2y}{dx^2} + C_4\, d\, \frac{d^3y}{dx^3} + etc.$$

Para termos a variação substituiremos a operação d da differenciação effectuada pela operação δ da variação, o que nos dá:

$$\delta\, F = C\, d\delta x + C_1\, \delta y + C_2\, \delta\, \frac{dy}{dx} + C_3\, \delta\, \frac{d^2y}{dx^2} + C_4\, \delta\, \frac{d^3y}{dx^3} + etc.$$

sendo C, C_1, C_2 etc. formações de x e y.

Fazendo para commodidade de calculo:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = r, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = s\, etc.$$

temos:

$$dy = pdx, \; dp = qdx, \; dq = rdx\; etc. \qquad (4)$$

A differencial e a variação da formação serão, pois :

$$d\, F = C\, dx + C_1\, dy + C_2\, dp + C_3\, dq + C_4\, dr + etc.$$

$$\delta\, F = C\, \delta x + C_1\, \delta y + C_2\, \delta p + C_3\, \delta q + C_4\, \delta r + etc.$$

Multiplicando a primeira por δx a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo temos:

$$(5) \qquad dx\ \delta F - \delta x\ dF = C_1\ (dx\ \delta y - dy\ \delta x) + C_2\ (dx\ \delta p - dp\ \delta x) +$$
$$+ C_3\ (dx\ \delta q - dq\ \delta x) + C_4\ (dx\ \delta r - dr\ \delta x) + etc.$$

A questão está assim dependendo da determinação das variações

$$\delta p,\ \delta q,\ \delta r\ etc.$$

Tomando estas variações temos:

$$\delta p = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx\ \delta\ dy - dy\ \delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta\ y - \frac{dy}{dx}\ \delta dx}{dx} =$$
$$= \frac{d\ \delta y - pd\ \delta x}{dx}$$

$$\delta q = \delta \frac{dp}{dx} = \frac{dx\ \delta\ dp - dp\ \delta\ dx}{dx^2} = \frac{d\delta p - \frac{dp}{dx}\ d\delta x}{dx} =$$
$$= \frac{d\delta p - qd\ \delta x}{dx}$$

$$\delta r = \delta \frac{dq}{dx} = \frac{dx\ \delta\ dq - dq\ d\delta x}{dx^2} = \frac{d\ \delta\ q - \frac{dq}{dx}\ d\ \delta x}{dx}$$
$$= \frac{d\delta q - rd\ \delta x}{dx}$$

$$\delta s = \delta \frac{dr}{dx} = \frac{dx\ \delta\ dr - dr\ \delta\ dx}{dx^2} = \frac{d\ \delta\ r - \frac{dr}{dx}\ d\ \delta x}{dx} =$$
$$= \frac{d\ \delta r - s\ d\ \delta x}{dx}$$

e assim por diante.

Substituindo no coefficiente de C_1 da expressão (5) dy por $p\,dx$, e nos de

$$C_2\ ,\ C_3\ ,\ C_4\ ,\ etc.$$

as variações

$$\delta p\ ,\ \delta q\ ,\ \delta r\ ,\ etc.$$

que acabamos de obter, resulta:

$$dx\ \delta y - dy\ \delta x = dx\ \delta y - p\ dx\ \delta x = dx\ (\ \delta y - p\ \delta x\ )$$

$$dx\ \delta p - dp\ \delta x = dx\ \frac{d\ \delta\ y - pd\ \delta x}{dx} - dp\ \delta x = d\ \delta y - pd\ \delta x -$$

$$- dp\ \delta x = d\left[\ \delta y - p\ \delta\ x\ \right] = d\left[\ \delta y - \frac{dy}{dx}\ \delta x\ \right] =$$

$$= d\left[\ \frac{\delta y\ dx - dy\ \delta x}{dx}\ \right] = d\left[\ \delta y - p\ \delta x\ \right]$$

$$dx\ \delta q - dq\ \delta x = dx\ \frac{d.\ \delta p - q\ d\ \delta x}{dx} - dq\ \delta x = d.\ \delta p - q\ d.\ \delta x -$$

$$- dq\ \delta x = d\left[\ \delta\ p - q\ \delta x\ \right] = d\left[\ \delta p - \frac{dp}{dx}\ \delta x\ \right] =$$

$$= d\left[\ \frac{\delta p\ dx - dp\ \delta x}{dx}\ \right].$$

$$dx\ \delta r - dr\ \delta x = dx\ \frac{d\ \delta q - r\ d\ \delta x}{dx} - dr\ \delta x = d\left[\ \delta q - r\ \delta x\ \right] =$$

$$= d\left[\ \delta q - \frac{dq}{dx}\ \delta x\ \right] = d\left[\ \frac{dx\ \delta q - dq\ \delta x}{dx}\ \right]$$

e assim por diante.

Fazendo para simplificar:

$$\delta y - p\ \delta\ x = \delta u$$

resulta:

$$dx\ \delta\ y - dy\ \delta x = \delta u\ dx$$

$$dx\ \delta\ p - dp\ \delta\ x = d\ \delta u$$

$$dx\ \delta q - dq\ \delta x = d\left[\ \frac{1}{dx}\ .\ d\ \delta u\ \right]$$

$$dx\ \delta r - dr\ \delta x = d\left[\ \frac{1}{dx}\ .\ d\left(\ \frac{1}{dx}\ .\ d\ \delta u\right)\ \right]$$

etc. *etc.* *etc.*

Substituindo estes valores na expressão (5) e o resultado na expressão (a), temos:

$$\delta \int F\,dx = F\delta x + \int C_1\,dx\,\delta u + \int C_2\,d\,\delta u +$$

$$+ \int C_3\,d\left[\frac{1}{dx}\,.\,d\,\delta u\right] + \int\left[C_4\,d\left[\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{1}{dx}\,.d.\delta u\right)\right]\right. + etc.$$

Para fazer desapparecer do signal de integral os termos affectos do duplo signal δd, utilisaremos, como anteriormente, o processo de integração por partes, o que nos dá:

$$\int C_2\,d\,\delta u = C_2\,\delta u - \int d\,C_2\,\delta u$$

$$\int C_3\,d.\left[\frac{1}{dx}\,d\,\delta x\right] = C_3\,\frac{1}{dx}\,.d\delta u - \int \frac{1}{dx}\,d\,C_3\,.\,d\,\delta u =$$

$$= \frac{1}{dx}\,.\,C_3\,d\,\delta u - \frac{1}{dx}\,d\,C_3\,\delta u + \int d\left(\frac{1}{dx}\,dC_3\right)\delta u$$

$$\int C_4\,d\left[\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\,\delta u\right)\right] = \frac{1}{dx}\,C_4\,d\left(\frac{1}{dx}\,.d.\,\delta u\right) -$$

$$- \int \frac{1}{dx}\,d\,C_4\,d\left(\frac{1}{dx}\,.\,d\,.\,\delta u\right) = \frac{1}{dx}\,C_4\,.\,d\left(\frac{1}{dx}\,.\,d.\,\delta u\right) -$$

$$- \frac{1}{dx^2}\,d\,C_4\,d.\,\delta u + \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\,C_4\right)\delta u -$$

$$- \int d\left[\frac{1}{dx}\,.\,d\left(\frac{1}{dx}\,.\,d\,C_4\right)\right]\delta u$$

e assim por diante.

Substituindo estes valores na expressão

$$\delta \int F\,dx,$$

resulta:

$$(C)\ \delta \int F\,dx = F\,\delta x + \delta u \left[C_2 - \frac{1}{dx}\,d.\,C_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx}\,.\,d\left(\frac{1}{dx}\,.\,C_4\,.\right) - etc \right] + \frac{1}{dx}\,.\,d\,\delta u \left[C_3 - \frac{1}{dx}\,d.\,C_4 + \right.$$

$$\left. + etc \right] + \frac{1}{dx}\,d\,.\left(\frac{1}{dx}\,.\,d\,.\,\delta n\right)\left[C_4 - etc \right] + etc +$$

$$+ \int dx\,\delta u \left[C_1 - \frac{1}{dx}\,.\,d.\,C_2 + \frac{1}{dx}\,.\,d\left(\frac{1}{dx}\,.\,d\,C_3\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{dx}\,d.\left(\frac{1}{dx}\,d.\left(\frac{1}{dx}\,.\,d\,.\,C_4\right)\right) + etc \right]$$

Suppondo dx constante esta fórmula simplifica-se, reduzindo-se á seguinte:

$$(D)\ \delta \int F\,dx = F\,\delta x + \delta u \left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + \frac{d^2C_4}{dx^2} - etc. \right] +$$

$$+ \frac{d\delta u}{dx}\left[C_3 - \frac{dC_4}{dx} + etc \right] + \frac{d^2\delta u}{dx^2}\left[C_4 - etc \right] + etc. +$$

$$+ \int dx\,\delta u \left[C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - \frac{d^3C_4}{dx^3} + etc. \right]$$

Cada uma destas expressões contém uma parte affecta do signal de integração e outra della independente, devendo a esta juntar-se as constantes provenientes das integrações effectuadas.

Si a formação F contém mais de uma variavel dependente de x estas fórmulas podem abranger esses casos juntando-se aos segundos membros, por cada variavel, termos em tudo semelhante aos obtidos para y.

Substituindo-se no termo affecto da integração, δu por seu valor ($\delta y - p\,\delta x$] esses termos tomam a fórma:

$$-\int dx \left[C_1 - \frac{1}{dx}\, d.\, C_2 + etc \right] \delta y\,,$$

$$+\int dx \left[C_1 - \frac{1}{dx}\, .\, d\, C_2 + etc \right] p\, \delta x$$

isto é, si designarmos por A o coefficiente de δy o de δx será $(-p\,A)$.

Igualando a zero na expressão (D), o termo affecto da integral a equação que resulta:

$$C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - \frac{d^3C_4}{dx^3} + etc. = 0$$

representará a condição de integrabilidade de uma formação F de duas variaveis quando a differencial de uma dellas é constante.

3.º — Determinar a variação da integral :

$$\int F_1\, dx$$

sendo F_1 uma formação dada da integral:

$$\int F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right) dx$$

Façamos:

$$Z = \int F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right) dx \qquad (2)$$

Tomemos a fórmula geral (a) do problema anterior :

$$(a) \qquad \delta \int F\, dx = F\, \delta x + \int (\, dx\, \delta F - dF\, \delta x)$$

Applicando-a á expressão dada temos:

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \int (dx\, \delta F_1 - dF_1\, \delta x)$$

A fórmula (2) nos dá :

$$dz = F \left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots . \right) dx = F\, dx$$

Differenciando e variando $F_1\, dx$, temos:

$$d\, F_1 = H\, dz \quad \text{e} \quad \delta\, F_1 = H\, \delta z$$

sendo H uma formação de z. Multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx e subtrahindo uma da outra:

(4) $$dx\, \delta\, F_1 - d\, F_1\, \delta x = H\, dx\, \delta z - H\, \delta x\, dz$$

Tomando as variações na fórmula (2) e attendendo á fórmula (a), temos:

$$\delta z = \delta \int F\, dx = F\, \delta x + \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x)$$

Substituindo-se este valor em (4), temos:

$$dx\, \delta F_1 - dF_1\, \delta x = F\, H\, dx\, \delta x + H\, dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) -$$

$$- H\, \delta x\, dz$$

Porém como

$$dz = F\, dx$$

resulta :

$$dx\, \delta F_1 - dF_1\, \delta x = H\, dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x)$$

Substituindo na expressão (3), temos:

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \int \left[H\, dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) \right]$$

Suppondo:

$$\int H\, dx = k$$

temos:

$$dk = H\, dx$$

d'onde

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \int \left[dk \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) \right]$$

Integrando por partes, resulta:

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + k \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) - \tag{5}$$

$$- \int k\, (dx\, \delta F - dF\, \delta x)$$

Sendo a formação F da fórma:

$$F \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \right)$$

fazendo:

$$\frac{dy}{dx} = p, \frac{d^2y}{dx^2} = q, \frac{d^3y}{dx^3} = r \text{ etc.}$$

e tomando a differencial e a variação, temos:

$$dF = D\, dx + D_1\, dy + D_2\, dp + D_3\, dq + \text{etc.}$$

$$\delta F = D\, \delta x + D_1\, \delta y + D_2\, \delta p + D_3\, \delta q + \text{etc.}$$

Multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, temos:

$$(6) \qquad \delta F\, dx - dF\, \delta x = D_1 (\delta y\, dx - dy\, \delta x) + D_2 (\delta p\, dx - dp\, \delta x) + D_3 (\delta q\, dx - dq\, \delta x) + etc.$$

Seguindo agora uma marcha perfeitamente identica á do segundo problema, chegaremos ás expressões:

$$k \int \left(dx\, \delta F - dF\, \delta x \right) = k \left[D_2 - \frac{1}{dx} d\, D_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx} . d \left(\frac{1}{dx} d\, D_4 \right) - etc \right] \delta u + \frac{1}{dx} . d . \delta u \left[D_3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{dx} . d\, D_4 + etc \right] k + \frac{1}{dx} . d . \left(\frac{1}{dx} . d . \delta u \right) \left[D_4 - etc. \right] k\, etc. +$$

$$+ k \int dx\, \delta u \left[D_1 - \frac{1}{dx} d\, D_2 + \frac{1}{dx} . d . \left(\frac{1}{dx} . d\, D_3 \right) - etc. \right]$$

$$\int k \left(dx\, \delta F - dF\, \delta x \right) = \left[k\, D_2 - \frac{1}{dx} . d . k\, D_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx} d . \left(\frac{1}{dx} . d . k\, D_4 \right) - etc \right] \delta u + \frac{1}{dx} d . \delta u +$$

$$+ \left[k\, D_3 - \frac{1}{dx} d . k\, D_4 + etc. \right] +$$

$$+ \frac{1}{dx} . d \left(\frac{1}{dx} . d . \delta u \right) \left(k\, D_4 - etc. \right) + etc. +$$

$$+ \int dx\, \delta u \left[k\, D_1 - \frac{1}{dx} d . k\, D_2 + \frac{1}{dx} . d . \left(\frac{1}{dx} . d\, k\, D_3 \right) - etc. \right]$$

Substituindo estes valores na expressão (5), resulta:

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + k \left[D_2 - \frac{1}{dx} \,.\, d\, D_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx} \,.\, d \left(\frac{1}{dx} \,.\, dD_4 \right) + etc \right] \delta u + \frac{1}{dx} \,.\, d\, \delta u \left[D_3 - \frac{1}{dx} \,.\, d\, D_4 + \right.$$

$$\left. + etc \right] k + \frac{1}{dx}\, d \left(\frac{1}{dx} \,.\, d\, \delta u \right) \left(D_4 - etc. \right) k + etc. +$$

$$+ k \int dx\, \delta u \left[D_1 - \frac{1}{dx}\, d\, D_2 + \frac{1}{dx} \,.\, d \left(\frac{1}{dx} \,.\, d\, D_3 \right) - etc. \right] -$$

$$- \left[k\, D_2 - \frac{1}{dx} \,.\, d\, k\, D_3 + \frac{1}{dx} \,.\, d \left(\frac{1}{dx} \,.\, d\, k\, D_4 - etc. \right) \right] \delta u -$$

$$- \frac{1}{dx} \,.\, d.\, \delta u \left[k\, D_3 - \frac{1}{dx} \,.\, d\, k\, D_4 + etc. \right] -$$

$$- \frac{1}{dx} \,.\, d \left(\frac{1}{dx} \,.\, d.\, \delta u \right) \left[k\, D_4 - etc. \right] - etc.$$

$$- \int dx\, \delta x \left[k\, D_1 - \frac{1}{dx} \,.\, d\, k\, D_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx} \,.\, d \,.\, \left(\frac{1}{dx}\, d.\, k\, D_3 \right) - etc. \right]$$

Esta expressão póde tomar uma fórma mais simples mediante uma consideração propria aos problemas a ellas relativos, consideração essa que faremos daqui em diante, sempre que o caso comportal-a.

Suppondo a integral $\int H\, dx$ nulla para $x = a$ e $y = b$ e tendo um valor determinado H_0 para $x = x_1$, $y = y_1$ podemos considerar a integral k do segundo termo da fórmula

(5) como relativa a esses valores, e a integral k do terceiro termo como relativa a valores não determinados de x e y, de modo que a expressão (5) póde ser escripta:

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x +$$

$$+ \int H_0\, (dx\, \delta F - dF\, \delta x) - \int \int H\, dx\, (dx\, \delta F - dF\, dx)$$

ou:

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, dx + \int \left[(H_0 - \int H\, dx)\, (dx\, \delta F - d\, F\, \delta x) \right].$$

Fazendo :

$$H_0 - \int H\, dx = h$$

temos:

$$\delta \int F_1\, dx = F_1\, dx + \int h\, (\delta F\, dx - d\, F\, \delta x).$$

Substituindo

$$(\delta F\, dx - d\, F\, \delta x)$$

por seu valor (6) e seguindo a marcha do problema segundo, acharemos:

(E) $$\delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x +$$

$$+ \left[h\, D_2 - \frac{1}{dx} . d\, h\, D_3 + \frac{1}{dx} . d \left(\frac{1}{dx} . d. h\, D_4 - etc. \right) \right] du +$$

$$+ \frac{1}{dx} . d. \delta u \left[h\, D_3 - \frac{1}{dx}\, d\, h\, D_4 + etc. \right]$$

$$+ \frac{1}{dx} . d \left(\frac{1}{dx} . d. \delta u \right) (h\, D_4 - etc.) + etc. + \int dx\, \delta u$$

$$\left[h\, D_1 - \frac{1}{dx} . d\, h\, D_2 + \frac{1}{dx} . d \left(\frac{1}{dx} . d\, h\, D_3 \right) - etc. \right]$$

No caso de ser dx constante, teremos :

$$(E') \qquad \delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \Big[h\, D_2 - \frac{1}{dx} \cdot d\, h\, D_3 +$$

$$+ \frac{d^2\, h\, D_4}{dx^2} - \frac{d^3\, h\, D^5}{dx^3} + etc. \Big] \delta u + \frac{d\, \delta u}{dx} \Big[h\, D_3 -$$

$$- \frac{d\, h\, D_4}{dx} + \frac{d^2\, h\, D_5}{dx^2} - etc. \Big] + \frac{d^2\, \delta u}{dx^2} \Big[h\, D_4 -$$

$$- \frac{d\, h\, D_5}{dx} + etc. \Big] + etc. + \int dx\, \delta u \Big[h\, D_1 - \frac{d\, h\, D_2}{dx} +$$

$$+ \frac{d^2\, h\, D_3}{dx^2} - \frac{d^3\, h\, D_4}{dx^3} + etc. \Big]$$

4.º — Determinar a variação da integral :

$$(1) \qquad \int F_2 \left(x,\, y,\, z,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \frac{d^3y}{d^3x} \ldots\ldots \right) dx$$

sendo F_2 uma formação de x, y, z, e dos coefficientes differenciaes de y em relação a x, sendo z, dado pela expressão :

$$(2) \qquad z = \int F \left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots \right) dx.$$

Applicando a formula geral *(a)* á formação (1) temos:

$$(3) \qquad \delta \int F_2\, dx = F_2\, \delta x + \int (dx\, \delta F - d\, F\, \delta x).$$

Calculemos a differença

$$(dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x).$$

Para isso façamos como anteriormente, o que daqui em diante faremos sempre :

$$\frac{dy}{dx} = p,\ \frac{d^2y}{dx^2} = q,\ \frac{d^3y}{dx^3} = r,\ \frac{d^4y}{dx^4} = s,\ etc.$$

Tomando a differencial e a variação da formação F_2, résulta :

$$d\,F_2 = M\,dz = +\,M_1\,dx + M_2\,dy + M_3\,dp + M_4\,dq + etc.$$

$$\delta\,F_2 = M\,\delta z + M_1\,\delta x + M_2\,\delta y + M_3\,\delta p + M_4\,\delta q + etc.$$

sendo

$$M,\ M_1,\ M_2\ etc.,$$

formações de

$$z,\ x,\ y,\ p,\ q\ etc.$$

Multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, temos:

$$dx\,\delta F - d\,F\,\delta x = M\,(\delta z\,dx - dz\,\delta x) + M_2\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) +$$
$$+\,M_3\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) + M_4\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + etc.$$

Porém a expressão (2) nos dá :

$$dz = F\,dx, \qquad \delta z = \delta \int F\,\delta x = F\,\delta x + \int (dx\,\delta\,F - d\,F\,\delta x).$$

Substituindo estes valores na expressão anterior, resulta:

$$dx\,\delta\,F - d\,F\,\delta x = M\,dx \int (dx\,\delta\,F - d\,F\,\delta x) +$$
$$+\,M_2\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) + M_3\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) +$$
$$+\,M_4\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + etc.$$

Substituindo esta expressão no valor (3), temos :

$$(4)\quad \delta \int F_2\,dx = F_2\,\delta x + \int \left[M\,dx \int (dx\,\delta\,F - d\,F\,\delta x)\right] +$$
$$+ \int M_2\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) +$$
$$+ \int M_3\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) + \int M_4\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + etc.$$

Consideremos a integral:

$$5) \qquad \int \left[M\, dx \int (dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x) \right].$$

Fazendo:

$$\int M\, dx = t, \quad \text{ou} \quad M dx = dt$$

substituindo em (5) e integrando por partes, temos:

$$\int \left[M\, dx \int dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x) \right] = \int M\, dx \times$$

$$\times \int (dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x) - \int \left[\int M\, dx\, (dx\, \delta F - d\, F\, \delta x \right].$$

Suppondo a integral:

$$\int M\, dx$$

nulla para

$$x = a \quad \text{e} \quad y = b$$

e tendo um determinado valor H_1 para

$$x = x_1 \quad \text{e} \quad y = b_1$$

conforme a consideração do problema anterior, teremos:

$$(6) \qquad \int \left[M\, dx \int (dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x) \right] =$$

$$= \int H_1 (dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x) - \int \left[\int M\, dx\, (dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x) \right] =$$

$$= \int \left[(H_1 - \int M\, dx)\, (dx\, \delta\, F - d\, F\, \delta x) \right].$$

Fazendo:

$$H_1 - \int M\,dx = k$$

e substituindo o valor (6) na expressão (4), resulta:

$$(7) \qquad \delta \int F_2\,dx = F_2\,\delta x + \int k\,(dx\,\delta F - dF\,\delta x) +$$
$$+ \int M_2\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) + \int M_3\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) +$$
$$+ \int M_4\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + \text{etc.}$$

Calculemos agora a differença $(dx\,\delta F - dF\,\delta x)$.

Tomando a differencial e a variação da formação F, temos:

$$dF = A\,dx + A_1\,dy + A_3\,dp + A_4\,dq + A_5\,dr + \text{etc.}$$
$$\delta F = A\,\delta x + A_1\,\delta y + A_3\,\delta p + A_4\,\delta q + A_5\,\delta r + \text{etc.}$$

Multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, resulta:

$$\delta F\,dx - dF\,\delta x = A_1\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) + A_2\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) +$$
$$+ A_3\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + A_4\,(\delta r\,dx - dr\,\delta x) + \text{etc.}$$

Substituindo este valor na relação (7), temos:

$$\delta \int F_2\,dx = F_2\,\delta x + \int (k\,A_1 + M_2)\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) +$$
$$+ \int (k\,A_2 + M_3)\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) + \int (k\,A_3 + M_4)\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + \text{etc.}$$

Fazendo:

$$k\,A_1 + M_2 = N_1\ ,\quad k\,A_2 + M_3 = N_2\ ,\quad k\,A_3 + M_4 = N_3\ ,\quad \text{etc.}$$

resulta:

$$\delta \int F_2\,dx = F_2\,\delta x + \int N_1\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) + \int N_2\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) +$$
$$+ \int N_3\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + \text{etc.}$$

expressão analoga ás anteriormente obtidas. Seguindo, pois, uma marcha identica á do problema segundo, temos :

$$(F) \qquad \delta \int F_2\, dx = F_2\, \delta x + \delta u \left[N_2 - \frac{1}{dx}\, d\, N_3 + \right.$$

$$+ \frac{1}{dx}\, d. \left(\frac{1}{dx}\, .d.\, N_4 \right) - \text{etc.} \Big] + \frac{1}{dx}\, .d.\, \delta u \left[N_3 - \frac{1}{dx}\, .\, dN_4 + \right.$$

$$\left. + \text{etc.} \right] + \frac{1}{dx}.d. \left(\frac{1}{dx}\, .d.\, \delta u \right) \left(N_4 - \frac{dN_5}{dx} + \text{etc.} \right) +$$

$$+ \text{etc.} + \int dx\, \delta u \left[N_1 - \frac{1}{dx}\, d.\, N_2 + \frac{1}{dx}\, .d \left(\frac{1}{dx}\, .d\, N_3 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{dx}\, .d. \left(\frac{1}{dx}\, d. \left(\frac{1}{dx}\, .d\, N_4 \right) \right) + \text{etc.} \right]$$

5.º — Determinar a variação da integral :

$$(1) \qquad \int F_1 \left(x,\, y,\, z,\, \frac{dy}{dz},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \frac{d^3y}{dx^3},\, \text{etc.} \right) dx$$

sendo F uma formação de z, x, y e dos coefficientes differenciaes de y em relação a x, e sendo z dada pela expressão :

$$(2) \qquad z = \int F_2 \left(x,\, y,\, v,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots \right) dx$$

e v pela seguinte :

$$(3) \qquad v = \int F \left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx} \ldots\ldots \right) dx$$

Applicando a formula geral (a) á expressão (1), temos :

$$(4) \qquad \delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \int (dx\, \delta\, F_1 - d\, F_1\, \delta x)$$

Tomando a differencial e a variação da formação F, resulta :

$$d\, F_1 = A\, dz + A_1\, dx + A_2\, dy + A_3\, dp + A_4\, \delta q + \text{etc.}$$

$$\delta\, F_1 = A\, \delta z + A_1\, \delta x + A_2\, \delta p + A_3\, \delta p + A_4\, \delta q + \text{etc.}$$

Multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, temos:

$$5)\quad \delta F_1\, dx - dF_1\, \delta x = A\,(\delta z\, dx - dz\, \delta x) + A_2\,(\delta y\, dx - dy\, \delta x) + \\ + A_3\,(\delta p\, dx - dp\, \delta x) + A_4\,(\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

A formula (2) nos dá:

$$dz = F_2\, dx\,,\ \delta z = \delta \int F_2\, dx = F_2\, \delta x + \int (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x)$$

donde:

$$\delta z\, dx - dz\, \delta x = dx \int (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x)$$

Substituindo este valor na relação (5), temos:

$$(6)\quad \delta F_1\, dx - dF_1\, \delta x = A dx \int (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x) + A_2\,(dx\, \delta y - dy\, \delta x) + \\ + A_3\,(\delta p\, dx - dp\, \delta x) + A_4\,(\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Substituindo este valor em (4), temos:

$$(7)\quad \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \int \left[A dx \int (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x) \right] + \\ + \int A_2\,(\delta y\, dx - dy\, \delta y) + \int A_3\,(\delta p\, dx - dp\, \delta x) + \\ + \int A_4\,(\delta q\, dy - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Fazendo:

$$\int A dx = k_1$$

ou

$$A dx = dk_1$$

substituindo no segundo termo da expressão (7) e integrando por partes, temos:

$$\int \left[A dx \int (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x) = \int A dx \times \int (dx\, \delta F_2 - \\ - dF_2\, \delta x) - \int \int A dx\,(\delta F_2\, dx - dF_2\, \delta x)$$

Fazendo a mesma consideração que nos problemas anteriores e designando por H o valor de $\int A dx$ para $x = a_1$ e $y = b_1$, resulta:

$$\int \left[A dx \int (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x) \right] =$$
$$= \int \left[(H - \int A dx) (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x) \right]$$

Fazendo:

$$H - \int A\, dx = K$$

e substituindo a integral na expressão (7), resulta:

$$(8) \qquad \delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \int K (dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x) + \int A_2$$
$$(\delta y\, dx - dy\, \delta x) + \int A_3 (\delta p\, dx - dp\, \delta x) + \text{etc.}$$

Determinemos agora a differença

$$(dx\, \delta F_2 - dF_2\, \delta x).$$

Tomando a variação e a differencial da formação F_2, temos:

$$dF_2 = B dv + B_1\, dx + B_2\, dy + B_3\, dp + B_4\, dq \text{ e etc.}$$
$$\delta F_2 = B \delta v + B_1\, \delta x + B_2\, \delta y + B_3\, \delta p + B_4\, \delta q + \text{etc.}$$

Multiplicando a primeira por δv, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, resulta:

$$(9) \quad \delta F_2\, dx - dF_2\, \delta x = B (\delta v\, dx - dv\, \delta x) + B_2 (\delta y\, dx - dy\, \delta x) +$$
$$+ B_3 (\delta p\, dx - dp\, \delta x) + B_4 (\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Porém a expressão (3) nos dá:

$$dv = F dx, \quad \delta v = \delta \int F dx = F \delta x + \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x)$$

d'onde:

$$\delta v\, dx - dv\, \delta x = dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x)$$

Substituindo este valor em (9), temos:

$$\delta F_2\, dx - dF_2\, \delta x = B dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) + B_2\, (\delta y\, dx - dy\, \delta x) +$$
$$+ B_3\, (\delta p\, dx - dp\, \delta x) + B_4\, (\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Substituindo este valor em (8), resulta:

$$(10) \quad \delta \int F_1\, dx = F_1\, \delta x + \int \left[KB\, dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) \right] +$$
$$+ \int (KB_2 + A_2)\, (\delta y\, dx - dy\, \delta x) + \int (KB_3 + A_3)$$
$$(\delta p\, dx - dp\, \delta x) \times \int (KB_4 + A_4)\, (\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Fazendo:

$$\int KB\, dx = K_2 \quad \text{ou} \quad KB\, dx = dK_2$$

Substituindo na integral do segundo termo e integrando por partes, resulta:

$$\int \left[KB\, dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) \right] =$$
$$= \int KB\, dx \times \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) - \int \int KB\, dx\, (dx\, \delta F - dF\, \delta x)$$

Segundo a mesma consideração anterior designando por H_0 o valor da integral

$$\int K\, B\, dx$$

para

$$x = a_2 \quad \text{e} \quad y = b_2,$$

temos:

$$\int \left[KB\, dx \int (dx\, \delta F - dF\, \delta x) \right] = \int \left[(H_0 - \int KB\, dx) \right.$$
$$\left. (dx\, \delta F - dF\, \delta x) \right]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Fazendo:

$$A_2 + K'B_2 + K'D_1 = M_1 \; A_3 + KB_3 + K' \; D_2 = M_2, \; A_4 + \\ + KB_4 \; K' \; D_3 = M_3, \text{ etc.}$$

temos:

$$\delta \int F_1 \, dx = F_1 \, dx + \int M_1 \, (\delta y \, dx - dy \, \delta x) + \int M_2 \, (\, \delta p \, dx - \\ - \, dp \, \delta x \,) + \int M_3 \, (\, \delta q \, dx - dp \, \delta x \,) + \text{etc.}$$

Substituindo δp, δq, δr etc., por seus valores obtidos no problema segundo, e seguindo a mesma marcha temos finalmente:

$$(F) \quad \delta \int F_1 \, dx = F_1 \, \delta x + \delta u \left[M_3 - \frac{d M_3}{dx} + \frac{1}{dx} \, d \left(\frac{1}{dx} \, d \, M_4 \right) \right. \\ \left. - \text{ etc.} \right] + \frac{d. \, \delta u}{dx} \left[M_3 - \frac{1}{dx} \, . \, d \, M_4 + \text{etc.} \right] + \\ + \frac{1}{dx} \, . \, d. \left(\frac{1}{dx} \, . d. \, \delta u \right) \left(M_4 - \frac{1}{dx} \, . \, dM_3 + \text{etc.} \right) + \text{etc.} + \\ + \int dx \, \delta u \left[M_1 - \frac{1}{dx} \, dM_2 + \frac{1}{dx} \, . \, \text{d.} \left(\frac{1}{dx} \, . \, d \, M_3 \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{dx} \, . \, \text{d.} \left(\frac{1}{dx} \, . \, \text{d} \left(\frac{1}{dx} \, . \, \text{d} \, M_4 \right) \right) + \text{etc.} \right]$$

6.º Determinar a variação da integral:

$$(1) \qquad \int F \left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2}, \ldots\ldots \right) dx$$

sendo F uma formação de z x, y e dos coefficientes differenciaes de y em relação a x, e sendo z dado pela equação:

$$(2) \qquad dz = F_1 \left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \right) dx$$

A equação (2) nos dá:

$$z = \int F_1 \, dx \tag{3}$$

Designemos por

$$\int F_2 \, dx$$

a integral indefinida comprehendida na expressão (3) de z.

Sendo F uma formação de z a expressão (1) será da fórma:

$$\int F\left(x, y, \int F_2 \, dx, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\right) dx \tag{4}$$

Sendo F_1 tambem formação de z, é claro que a formação F_2 conterá z, por conseguinte conterá

$$\int F_2 \, dx$$

e será da fórma:

$$F_2\left(x, y, \int F_2 \, dx, \frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2} \ldots\ldots\right) \tag{5}$$

Applicando a expressão (4) á fórmula geral (a), temos:

$$\delta \int F \, dx = F \, \delta x + \int (\delta F \, dx - d F \, \delta x) \tag{6}$$

Differenciando e variando a formação F, resulta:

$$d F = A \, d \int F_1 \, dx + A_1 \, dx + A_2 \, dy + A_3 \, dp + \text{etc.}$$

$$\delta F = A \, \delta \int F_1 \, dx + A_1 \, \delta x + A_2 \, \delta y + A_3 \, \delta p + \text{etc.}$$

Multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, teremos:

$$\delta F \, dx - d F \, \delta x = A \left[\delta x \, d \int F_1 \, dx - \delta x \, F_1 \, dx \right] + A_2 (\delta y \, dx - dy \, \delta x) +$$

$$+ A_1 \, \delta p \, dx - dp \, \delta x \ldots + A_3 (\delta p \, dx - dp \, \delta x) + \text{etc.}$$

Substituindo este valor em (6), resulta:

$$(7) \qquad \delta \int F\,dx = F\,\delta x + \int \left[A\,dx\,\delta \int F_2\,dx \right] -$$

$$- \int A\,F_2\,dx\,\delta x + \int A_2\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) + \int A_3\,(\delta p dx - dp\,\delta x) +$$

$$+ \int A_4\,(\delta_q\,dx - d_q\,\delta x) + \text{etc.}$$

Applicando a fórmula geral (a) á expressão

$$\delta \int F_2\,dx,$$

temos:

$$(8) \qquad \delta \int F_2\,dx = F_2\,\delta x + \int (dx\,\delta F_2 - d\,F_2\,\delta x)$$

Substituindo na expressão (7), resulta:

$$\delta \int F\,dx = F\,\delta x + \int A\,F_2\,dx\,\delta x + \int \left[A\,dx \int (\delta\,F_2\,dx - d\,F_2\,\delta x) \right] -$$

$$- \int A\,F_2\,dx\,\delta x + \text{etc.}$$

ou:

$$(9) \qquad \delta \int F\,dx = F\,\delta x + \int \left[A\,dx \int (\delta\,F_2\,dx - d\,F_2\,\delta x) \right] +$$

$$+ \int A_2\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) +$$

$$+ \int A_3\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) + \int A_4\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + \text{etc.}$$

Calculemos agora

$$(\delta\,F_2\,dx - d\,F_2\,\delta x)$$

Tomando a differencial e a variação da formação (5), temos:

$$d\,F_2 = C\,d. \int F_2\,dx + C_1\,dx + C_2\,dy + C_3\,dp + C_4\,dq + \text{etc.}$$

$$\delta\,F_2 = C\,\delta \int F_2\,dx + C_1\,\delta x + C_2\,\delta y + C_3\,\delta p + C_3\,\delta_q + \text{etc.}$$

Multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, temos:

$$\delta F_2\, dx - d F_2\, \delta x = C\left[dx\, \delta \int F_2\, dx - F_2\, dx\, \delta x\right] + \delta X\, dx - d X\, \delta x$$

sendo:

$$(10)\qquad \begin{cases} \delta X = C_1\, \delta x + C_2\, \delta y + C_3\, \delta p + C_4\, \delta q + \text{etc.} \\ d X = C_1\, dx + C_2\, dy + C_3\, dp + C_4\, dq + \text{etc.} \end{cases}$$

Substituindo neste valor em logar de

$$\delta \int F_2\, dx$$

sua expressão (8) e simplificando, resulta:

$$(11)\qquad \delta F_2\, dx - d F_2\, \delta x = C\, dx \int (\delta F_2\, dx - d F_2\, \delta x) + \\ + \delta X\, dx - d X\, \delta x$$

Fazendo:

$$\int (\delta F_2\, dx - d F_2\, \delta x) = v$$

resulta:

$$\delta F_2\, dx - d F_2\, \delta x = dv$$

Substituindo esta contracção na expressão (11), temos:

$$v - C\, v\, dx = \delta X\, dx - dX\, \delta x$$

Integrando esta equação, resulta:

$$v = e^{\int C\, dx}\left[Const. + \int e^{-\int C\, dx} (dx\, \delta X - d X\, \delta x)\right]$$

Substituindo a contracção v, por sua expressão, temos:

$$\int (\delta F_2\, dy - d F_2\, \delta x) =$$

$$= e^{\int C dx} \left[Const. + \int e^{-\int C\, dx} (dx\, \delta X - dX\, \delta x) \right]$$

Substituindo este valor na expressão (9), resulta

$$(12) \qquad \delta \int F\, dx = F\, \delta x +$$

$$+ \int \left[A dx\, e^{\int C dx} \int e^{-\int C\, dx} (dx\, \delta X - d X\, \delta x) \right] +$$

$$+ \int A_2 (\delta y\, dx - dy\, \delta x) + \int A_3 (\delta p\, dx - dp\, \delta x) +$$

$$+ \int A_4 (\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Fazendo:

$$\int A\, dx\, e^{\int C\, dx} = k_1$$

ou

$$A\, dx\, e^{\int C\, dx} = dk_1$$

substituindo na integral do segundo termo e integrando por partes, resulta:

$$\int \left[A\, dx\, e^{\int C\, dx} \int e^{-\int C\, dx} (\delta X\, dx - d X\, \delta x) \right] = W =$$

$$= \int A\, dx\, e^{\int C dx} \times \int e^{-\int C dx} (dx\, \delta X - d X\, \delta x) -$$

$$\int \left[\int A\, dx\, e^{\int C\, dx} \times e^{-\int C\, dx} (dx\, \delta X - d X\, \delta x) \right]$$

Suppondo a integral:

$$\int A\, dx\, e^{\int C\, dx}$$

annullando-se para $x = a$ e $y = b$ e designando por E o valor determinado por ella adquirido quando $x = a$ e $y = b$, conforme a consideração já feita nos casos anteriores, resulta:

$$W = \int \left[\left(E - \int A\, dx\, e^{\int C\, dx} \right) \left(dx\, \delta X - dX\, \delta x \right) \right.$$

Fazendo:

$$E - \int A\, dx\, e^{\int C\, dx} = k$$

temos, substituindo W na expressão (12)

$$\delta \int F\, dx = F\, dx + \int k\, (dx\, \delta X - d X\, \delta x) +$$

$$+ \int A_2 (\delta y\, dx - dy\, \delta x) +$$

$$+ \int A_3 (\delta p\, dx - dp\, \delta x) + \int A_4 (\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Substituindo δX e $d X$ por seus valores (10) e ordenando resulta:

$$\delta \int F\, dx = F\, \delta x + \int (A_2 + k\, C_2) (\delta y\, dx - dy\, \delta x) +$$

$$+ \int (A_3 + k\, C_3) (\delta p\, dx - dp\, \delta x) +$$

$$+ \int (A_4 + k\, C_4) (\delta q\, dx - dq\, \delta x) + \text{etc.}$$

Fazendo:

$$A_2 + k\,C_2 = D_2,\ A_3 + k\,C_3 = D_3,\ A_4 + k\,D_4 = D_4,\ \text{etc.}$$

temos:

$$\delta \int F\,dx = F\,\delta x + \int D_2\,(\delta y\,dx - dy\,\delta x) + \int D_3\,(\delta p\,dx - dp\,\delta x) +$$

$$+ \int D_4\,(\delta q\,dx - dq\,\delta x) + \text{etc.}$$

Substituindo δp, δq etc. por seus valores já obtidos no segundo problema e seguindo a mesma marcha, temos:

$$(A_6) \qquad \delta \int F\,dx = F\,\delta x + \delta u \left[D_2 - \frac{1}{dx} . d.\, D_4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx} . d. \left(\frac{1}{dx} . d.\, D_5 \right) - \text{etc.} \right] + \frac{1}{dx} . d.\, du \left[D_4 - \frac{1}{dx} . d.\, D_5 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx} . d. \left(\frac{1}{dx} - d\, D_6 \right) - \text{etc.} \right] + d \left(\frac{1}{dx} . d\,\delta u \right) \left(D_3 - \text{etc.} \right) +$$

$$+ \text{etc.} + \int dx\,\delta u \left[D_2 - \frac{1}{dx} . d\, D_3 + \frac{1}{dx} . d. \left(\frac{1}{dx} . d.\, D_4 \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{dx} . d \left(\frac{1}{dx} . d\, D_5 \right) + \text{etc.} \right. \right]$$

7º — Problema Geral:

Determinar a variação de uma formação φ supposta dada pela equação differencial de uma ordem qualquer:

$$(1) \qquad \psi\,(x, y, z \ldots \varphi, dx, d^2x \ldots dy, d^2y \ldots dz, d^2z \ldots d\varphi, d^2\varphi \ldots) = o$$

entre as variaveis x, y, z, etc., φ e suas differenciaes.

Considerando x, y, z, etc., dx, d^2x, etc., como variaveis e tomando a variação da equação (1), temos:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} m\,\delta\varphi + m_1\,\delta\,d\varphi + m_2\,\delta\,d^2\varphi + m_3\,\delta\,d^3\varphi + \text{etc.} + \\ + X\,\delta x + X_1\,\delta\,dx + X_2\,\delta\,d^2x + X_3\,\delta\,d^3x + \text{etc.} + \\ + Y\,\delta y + Y_1\,\delta\,dy + Y_2\,\delta\,d^2y + Y_3\,\delta\,d^3y + \text{etc.} + \\ + Z\,\delta z + Z_1\,\delta\,dz + Z_2\,\delta\,d^2z + Z_3\,\delta\,d^3z + \text{etc.} + \\ + \quad \text{etc.,} \qquad \text{etc.,} \qquad \text{etc.} \end{array} \right.$$

ou

$$(2) \quad 0 = \left\{ \begin{array}{l} m\,\delta\varphi + m.\,d\,\delta\varphi + m_2\,d^2\,\delta\varphi + m_3\,d^3\,\delta\varphi + \text{etc.} + \\ + X\,\delta x + X_1\,d\,\delta x + X_2\,d^2\,\delta x + X_3\,d^3\,\delta x + \text{etc.} + \\ + X\,\delta y + Y_1\,d\,\delta y + Y_2\,d^2\,\delta y + Y_3\,d^3\,\delta y + \text{etc.} + \\ + Z\,\delta z + Z_1\,d\,\delta z + Z_2\,d^2\,\delta z + Z_3\,d^3\,\delta z + \text{etc.} + \\ + \quad \text{etc.,} \qquad \text{etc.,} \qquad \text{etc.} \end{array} \right.$$

A questão agora reduz-se a obter-se desta equação o valor de $\delta\varphi$. Para isso multiplicando-a por uma indeterminada k, integrando, e a somma das integraes igualando a uma constante C, teremos:

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \int k\,m\,\delta\varphi + \int k\,m_1\,d\,\delta\varphi + \int k\,m_2\,d^2\,\delta\varphi + \\ \qquad + \int k\,m_3\,d^3\,\delta\varphi + \text{etc.} + \\ + \int k\,X\,\delta x + \int k\,X_1\,d\,\delta x + \int k\,X_2\,d^2\,\delta x + \\ \qquad + \int k\,X_3\,d^3\,\delta x + \text{etc.} + \\ + \int k\,Y\,\delta y + \int k\,Y_1\,d\,\delta y + \int k\,Y_2\,d^2\,\delta y + \\ \qquad + \int k\,Y_3\,d^3\,\delta y + \text{etc.} + \\ + \int k\,Z\,\delta z + \int k\,Z_1\,d\,\delta z + \int k\,\;_2\,d^2\,\delta z + \\ \qquad + \int k\,Z_3\,d^3\,\delta z + \text{etc.} + \\ + \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array} \right.$$

Utilisando a integração por partes para fazer desapparecer de sob o signal de integração os termos affectos do duplo signal de differenciação e variação, resulta:

$$\int k\, m_1\, d\, \delta\, \varphi = k\, m_1\, \delta\, \varphi - \int d\,(k\, m_1)\, \delta\, \varphi$$

$$\int k\, m_2\, d^2\, \delta\, \varphi = k\, m_2\, d\, \delta\, \varphi - \int d\,(k\, m_2)\, d\, \delta\, \varphi = k\, m_2\, d\, \delta\, \varphi -$$

$$- d\,(k\, m_2)\, \delta\, \varphi + \int d^2\,(k\, m_2)\, \delta\, \varphi$$

$$\int k\, m_3\, d^3\, \delta\, \varphi = k\, m_3\, d^2\, \delta\, \varphi - d\,(k\, m_1)\, d\, \delta\, \varphi + d^2\,(k\, m_3)\, \delta\, \varphi -$$

$$- \int d^3\,(k\, m_3)\, \delta\, \varphi$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\int k\, X_1\, d\, \delta\, x = k\, X_1\, \delta\, x - \int d\,(k\, X_1)\, \delta\, x$$

$$\int k\, X_2\, d^2\, \delta\, x = k\, X_2\, d\, \delta\, x - \delta\, x\, d\,(k\, X_2) + \int d^2\,(k\, X_2)\, \delta\, x$$

$$\int k\, X_3\, d^3\, \delta\, x = k\, X_3\, d^2\, \delta\, x - d\,(k\, X_3)\, d\, \delta\, x + d^2\,(k\, X_3)\, \delta\, x -$$

$$- \int d^3\,(k\, X_3)\, \delta\, \varphi$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\int k\, Y_1\, d\, \delta\, y = k\, Y_1\, \delta\, y - \int d\,(k\, Y_1)\, \delta\, y\,,$$

$$\int k\, Y_2\, d^2\, \delta\, y = k\, Y_2\, d\, \delta\, y - \delta\, y\, d\,(k\, Y_2) + \int d^2\,(k\, Y_2)\, \delta\, y$$

$$\int k\, Y_3\, d^3\, \delta\, y = k\, Y_3\, d^2\, \delta\, y - d\,(k\, Y_3)\, d\, \delta\, y + d^2\,(k\, Y_3)\, \delta\, y -$$

$$- \int d^3\,(k\, Y_3)\, \delta\, y$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Considerando $x, y, z,$ [illegible]
e tomando a variação da e[illegible] $\delta z - \int d\,(k\,Z_1)\,\delta z$

$$0 = \begin{cases} m\,\delta\varphi + m_1\,\delta\,d\varphi - \\ + X\,\delta x + X_1 \\ + Y\,\delta y + Y_1 \\ + Z\,\delta z + Z_1 \\ + \quad \text{etc.}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ -d\,(k\,Z_2)\,\delta z + \int d^2\,(k\,Z_2)\,\delta z \\ \\ -d\,(k\,Z_3)\,d\,\delta z + d^2\,(k\,Z_3)\,\delta z - \\ \end{array}$$

ou $\qquad - \int d^3\,(k\,Z_3)\,\delta z$

$$(2) \quad 0 = \begin{cases} m\,\delta\varphi + m \\ + X\,\delta x \\ + X\,\delta y \\ + Z\,\delta z \\ + \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \\ \end{array}$$

[illegible] outras variaveis.

A questão [illegible] valores na expressão de C, fazendo
valor de $\delta\varphi$. [illegible]
nada k, inte[illegible]
uma const[illegible]

$$\begin{array}{l}
\quad - d\,(k\,m_1) + d^2\,(k\,m_2) - d^3\,(k\,m_3) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(k\,m_2) + d^2\,(k\,m_3) - d^3\,(k\,m_4) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(k\,m_3) + d^2\,(k\,m_4) - d^3\,(m_5) + \text{etc.} \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\quad - d\,(k\,X_1) + d_2\,(k\,X_2) - d^3\,(k\,X_3) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(k\,X_2) + d^2\,(k\,X_3) - d^3\,(k\,X_4) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(k\,X_3) + d^2\,(k\,X_4) - d_3\,(k\,X)_5 + \text{etc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\quad - d\,(ky_1) + d^2\,(ky_2) - d^3\,(ky_3) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(ky_2) + d^2\,(ky_3) - d^3\,(ky_4) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(ky_3) + d^2\,(ky_4) - d^3\,(ky_5) + \text{etc.} \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\quad - d\,(kz_1) + d^2\,(kz_2) - d^3\,(kz_3) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(kz_2) + d^2\,(kz_3) - d^3\,(kz_4) + \text{etc.} \\
\quad - d\,(kz_3) + d^2\,(kz_4) - d^3\,(kz_5) + \text{etc.} \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{array}$$

e assim por deante resulta

$$
(3)\quad C = \left\{
\begin{array}{l}
\int (P_{\varphi}\, \delta\varphi + P_{x}\, \delta x + P_{y}\, \delta y + P_{z}\, \delta z + \text{etc.}) + \\
\quad + P_{\varphi}'\, \delta\varphi + P_{\varphi}''\, d.\, \delta\varphi + P_{\varphi}'''\, d^2\, \delta\varphi + \\
\qquad + P_{\varphi}''''\, d^3\, \delta\varphi + \text{etc.} + \\
\quad + P_{x}'\, \delta x + P_{x}''\, d.\, \delta x + P_{x}'''\, d^2\, \delta x + \\
\qquad P_{x}''''\, d^3\, \delta x + \text{etc.} + \\
\quad + P_{y}'\, \delta y + P_{y}''\, d.\, \delta y + P_{y}'''\, d^2\, \delta y + \\
\qquad + P_{y}''''\, d^3\, \delta y + \text{etc.} + \\
\quad + P_{z}'\, \delta z + P_{z}''\, d.\, \delta z + P_{z}'''\, d^2\, \delta z + \\
\qquad P_{z}''''\, d^3\, \delta z + \text{etc.} + \\
\quad + \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{array}
\right.
$$

Para determinar-se a constante C suppõe-se que para os valores de x, y, z etc., relativos ao começo da integral a parte indeterminada, affecta do signal de integração, na equação (3) se annulla, e a outra, a parte determinada, adquire um determinado valor.

Sejam:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c \quad \text{etc.}$$

esses valores, e supponhamos v o valor correspondente da formação φ, e Δ, o valor adquirido pela parte não affecta de integração; teremos, encerrando entre parenthesis com o indice c os differentes termos para indicar que os seus valores são relativos ao começo da integração:

$$
C = \Delta = \left\{
\begin{array}{l}
(P_{\varphi}'\, \delta\varphi)_c + P_{\varphi}''\, d\, \delta\varphi)_c + (P_{\varphi}'''\, d^2\, \delta\varphi)_c + \text{etc.} + \\
+ (P_{x}'\, \delta x)_c + (P_{x}''\, d\, \delta x)_c + \text{etc.} + \\
+ (P_{y}'\, \delta y)_c + (P_{y}''\, d\, \delta y)_c + \text{etc.} + \\
+ (P_{z}'\, \delta z)_c + (P_{z}''\, d\, \delta z)_c + \text{etc.} + \\
\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{array}
\right.
$$

Substituindo este valor na equação (3) e fazendo as contracções :

$$\int \theta = \int (P_{\varphi} \delta\varphi + P_{x} \delta x + P_{y} \delta y + P_{z} \delta z + \text{etc.} +$$

e

$$U = \left\{ \begin{array}{l} P'_{\varphi} \delta\varphi + P''_{\varphi} d\, \delta\varphi + \text{etc.} + \\ + P'_{x} \delta x + P''_{x} d\, \delta x + \text{etc.} + \\ + P'_{y} \delta y + P''_{y} d\, \delta y + \text{etc.} + \\ + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

resulta :

$$(4) \qquad \Delta = \int \theta + U$$

A indeterminada K sendo arbitraria, podemos suppol-a tal que tenhamos, para toda a extensão da integral :

$$P_{\varphi} = o,$$

o que nos dá, substituindo P_{φ} por sua expressão, a equação differencial :

$$(1) \qquad k\, m - d\,(km_1) + d^2\,(km_2) - d^3\,(km_3) + \text{etc.} = o$$

equação cuja ordem vem a ser evidentemente igual ao numero de termos que ella contém menos um, ou igual ao numero de coefficientes que na expressão de U affectam a variação $\delta\varphi$ e suas differenciaes.

Integrando, pois, completamente essa equação teremos um numero de constantes, igual ao numero desses coefficientes de modo que poderemos tomar essas constantes taes que annullem para os valores relativos ao fim da integração esses mesmos coefficientes á excepção de um delles P_{φ}', isto é, de sorte que tenhamos para o fim da integração:

$$(l_1) \qquad P''_{\varphi} = o,\ P'''_{\varphi} = o \text{ etc.}$$

Designando, pois, por x_1, y_1, z_1 etc., os valores de x, y, z etc. para o fim da integral, a expressão de U, perdendo nesta supposição todos os termos em que entram $d\delta\varphi$, $d^2\delta\varphi$, $d^3\delta\varphi$, etc., se reduzirá á seguinte, onde os termos encerrados em chaves com o indice f indicam os seus valores correspondentes aos valores x_1, y_1, z_1, etc., relativos ao fim da integração:

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{matrix} P' \\ \varphi \end{matrix} \delta\varphi\right]_f + \\ + \left[\begin{matrix} P' \\ x \end{matrix} \delta x\right]_f + \left[\begin{matrix} P'' \\ x \end{matrix} d\,\delta x\right]_f + \left[\begin{matrix} P''' \\ x \end{matrix} d^2\,\delta x\right]_f + \text{etc.} + \\ + \left[\begin{matrix} P' \\ y \end{matrix} \delta y\right]_f + \left[\begin{matrix} P'' \\ y \end{matrix} d\,\delta y\right]_f + \left[\begin{matrix} P''' \\ y \end{matrix} d^2\,\delta y\right]_f + \text{etc.} + \\ + \quad \text{etc.} \quad + \quad \text{etc.} \quad + \quad \text{etc.} \end{array} \right.$$

Representando por :

$$\int \left[\begin{matrix} P \\ \varphi \end{matrix} \delta\varphi + \begin{matrix} P \\ x \end{matrix} \delta x + \begin{matrix} P \\ y \end{matrix} \delta y + \text{etc.}\right]_f$$

o valor de $\int\theta$ correspondente ao fim da integral, a equação (4) será a seguinte, para toda a extensão da integral $\int\theta$:

$$\begin{array}{l} \left(\begin{matrix} P' \\ \varphi \end{matrix} \delta\varphi\right)_c + \left(\begin{matrix} P'' \\ \varphi \end{matrix} d\,\delta\varphi\right)_c + \text{etc.} + \\ + \left(\begin{matrix} P' \\ x \end{matrix} \delta x\right)_c + \left(\begin{matrix} P'' \\ x \end{matrix} d\,\delta x\right)_c + \text{etc.} + \\ + \left(\begin{matrix} P' \\ y \end{matrix} \delta y\right)_c + \left(\begin{matrix} P'' \\ y \end{matrix} d\,\delta y\right)_c + \text{etc.} + \\ + \quad \text{etc.} \quad + \quad \text{etc.} \quad + \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{matrix} P' \\ \varphi \end{matrix} \delta\varphi\right]_f + \\ + \left[\begin{matrix} P' \\ x \end{matrix} \delta x\right]_f + \\ + \left[\begin{matrix} P'' \\ x \end{matrix} d\,\delta x\right]_f + \text{etc.} + \\ + \left[\begin{matrix} P' \\ y \end{matrix} \delta y\right]_f + \\ + \left[\begin{matrix} P'' \\ y \end{matrix} d\,\delta y\right]_f + \text{etc.} + \\ + \text{etc.} + \text{etc.} + \\ + \int \left[\begin{matrix} P \\ x \end{matrix} \delta x + \begin{matrix} P \\ y \end{matrix} \delta y + \right. \\ \quad \left. + \begin{matrix} P \\ z \end{matrix} \delta z + \text{etc.}\right]_f \end{array} \right.$$

Substituindo este valor na equaç
contracções :

$$\int \theta = \int (P_{\varphi} \delta\varphi + P_{x} \delta x + P_{y} \delta y$$

e

$$U = \left\{ \begin{array}{l} P' \delta\varphi + P''_{\varphi} d\, \delta\varphi + \text{etc.} + \\ + P_{x} \delta x + P''_{x} d\, \delta x + \\ + P'_{y} \delta y + P''_{y} d\, \delta y + \\ + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

resulta :

(4)

A indeterminada K
tal que tenhamos, para

o que nos dá, substit
differencial :

(1) $k\, m -$

equação cuja ord
mero de termos
mero de coeff
variação $\delta\varphi$ e
Integra
um numero
de modo
annullem
mesmos
sorte q

Para fazer desapparecer do signal de integral os termos affectos do duplo signal d e δ, empregaremos, como sempre, o processo de integração por partes, o que nos dá:

$$\int (P - dQ + d^2 R - etc.)\, d.\, \delta x = \int Pd.\, \delta x - \int dQ\, d.\, \delta x +$$

$$+ \int d^2 Rd\, \delta x - etc. =$$

$$= P\, \delta x - \int dP\, \delta x - dQ\, \delta x + \int d^2 Q\, \delta x + d^2 R\, \delta x -$$

$$- \int d^3 R\, \delta x - etc.$$

$$\int (Q - dR + etc.)\, d^2\, \delta x = \int Qd^2\, \delta x - \int d\, Rd^2\, \delta x + etc. =$$

$$= Q\, d.\, \delta x - dQ\, \delta x + \int d^2 Q\, \delta x - d\, Rd.\, \delta x + d^2 R\, \delta x -$$

$$- \int d^3 R\, \delta x + etc.$$

e assim por deante, para os termos em que a differencial de δx fosse de ordem mais elevada.

Relativamente a y, teriamos de modo identico:

$$\int (P_1 - dQ_1 + d^2 R_1 - etc.)\, d\, \delta y = P_1\, \delta y - \int dP_1\, \delta y -$$

$$- dQ_1\, \delta y + \int d^2 Q_1\, \delta y +$$

$$+ d^2 R_1\, \delta y - \int d^3 R_1\, \delta y - etc.$$

$$\int (Q_1 - dR_1 + etc.)\, d^2\, \delta y = Q_1\, d.\, \delta y - dQ_1\, \delta y + \int d^2 Q_1\, \delta y -$$

$$- d\, R_1\, d.\, \delta y +$$

$$+ d^2 R_1\, \delta y - \int d^3 R_1\, \delta y + etc.$$

e assim por deante.

Tirando o valor de $[P' \varphi \delta \varphi]_f$ e trocando, conforme a regra fundamental a ordem dos signaes $d\,\delta$, teremos para solução completa da questão:

$$\left[\begin{matrix} P' \delta \varphi \\ \varphi \end{matrix}\right]_f = \left\{\begin{matrix} \left(\begin{matrix} P' \delta \varphi \\ \varphi \end{matrix}\right)_c + \\ + \left(\begin{matrix} P'' \, d \, \delta \varphi \\ \varphi \end{matrix}\right)_c + \text{etc.} + \\ + \left(\begin{matrix} P' \delta x \\ x \end{matrix}\right)_c + \\ + \left(\begin{matrix} P'' \, d \, \delta x \\ x \end{matrix}\right)_c + \text{etc.} + \\ \\ + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} \left[\begin{matrix} P' \delta x \\ x \end{matrix}\right]_f + \text{etc.} + \\ + \left[\begin{matrix} P' \delta y \\ y \end{matrix}\right]_f + \text{etc.} + \\ + \text{etc.} + \text{etc.} + \\ - \int \left[\begin{matrix} P dx \\ x \end{matrix} + \begin{matrix} P dy \\ y \end{matrix} + \text{etc.}\right]_f \end{matrix}\right\} \tag{V}$$

Sendo K tomada de modo que se tenha em toda a extensão da integral $P \varphi = o$.

8.º Determinar a variação da integral:

$$\int\int F(x, y, d^2x, \ldots\ldots dy, a^2y \ldots\ldots)$$

Conforme a segunda regra fundamental, temos:

$$\delta \int\int F = \int \delta \int F$$

Substituindo $\delta \int F$ por sua expressão (A), obtida no primeiro problema, resulta:

$$\begin{aligned} (1) \quad \delta \int\int F = & \int (N - d\,P + d^2\,Q - d^3\,R + etc.)\,\delta x + \\ & + \int (P - dQ + d^2\,R - etc.)\,d\,\delta x + \\ & + \int (Q - dR + etc.)\,d^2\,\delta x + etc. + \int (N_1 - d\,P_1 + \\ & + d^2\,Q_1 - d^3\,R_1 + etc.)\,\delta y + \\ & + \int (P_1 - dQ_1 + d^2\,R_1 - etc.)\,d.\,\delta y + \int (Q_1 - d\,R_1 + \\ & + etc.)\,d^2\,\delta y + etc. + \\ & + \int\int (M - dN + d^2\,P - d^3\,Q + etc.)\,\delta x + \\ & + \int\int (M_1 - dN_1 + d^2\,P_1 - d^3\,Q_1 + etc.)\,\delta y \end{aligned}$$

Para fazer desapparecer do signal de integral os termos affectos do duplo signal d e δ, empregaremos, como sempre, o processo de integração por partes, o que nos dá:

$$\int (P - dQ + d^2 R - etc.)\, d.\, \delta x = \int Pd.\, \delta x - \int dQ\, d.\, \delta x +$$
$$+ \int d^2 Rd\, \delta x - etc. =$$
$$= P\, \delta x - \int dP\, \delta x - dQ\, \delta x + \int d^2 Q\, \delta x + d^2 R\, \delta x -$$
$$- \int d^3 R\, \delta x - etc.$$

$$\int (Q - dR + etc.)\, d^2\, \delta x = \int Qd^2\, \delta x - \int d\, Rd^2\, \delta x + etc. =$$
$$= Q\, d.\, \delta x - dQ\, \delta x + \int d^2 Q\, \delta x - d\, Rd.\, \delta x + d^2 R\, \delta x -$$
$$- \int d^3 R\, \delta x + etc.$$

e assim por deante, para os termos em que a differencial de δx fosse de ordem mais elevada.

Relativamente a y, teriamos de modo identico:

$$\int (P_1 - dQ_1 + d^2 R_1 - etc.)\, d\, \delta y = P_1\, \delta y - \int dP_1\, \delta y -$$
$$- dQ_1\, \delta y + \int d^2 Q_1\, \delta y +$$
$$+ d^2 R_1\, \delta y - \int d^3 R_1\, \delta y - etc.$$

$$\int (Q_1 - dR_1 + etc.)\, d^2\, \delta y = Q_1\, d.\, \delta y - dQ_1\, \delta y + \int d^2 Q_1\, \delta y -$$
$$- d\, R_1\, d.\, \delta y +$$
$$+ d^2 R_1\, \delta y - \int d^3 R_1\, \delta y + etc.$$

e assim por deante.

Tomando a differencial da formação F, teremos:

$$dF = A\,dx + B\,dy + C\,dz + A_1\,dp_1 + B_1\,dq_1 + A_2\,dp_2 + B_2\,dq_2 + \\ + C_2\,dr_2 + A_3\,dp_3 + B_3\,dq_3 + C_3\,dr'_3 + etc.$$

Considerando a differencial sómente em relação a x, temos:

$$\frac{dF}{dx} = A + C\frac{dz}{dx} + A_1\frac{dp_1}{dx} + B_1\frac{dq_1}{dx} + \\ + A_2\frac{dp_2}{dx} + B_2\frac{dq_2}{dx} + C_2\frac{dr_2}{dx} + etc.$$

$$(a') \qquad \frac{dF}{dx} = A + Cp_1 + A_1\,p_2 + B_1\,r_2 + A_2\,p_3 + B_2\,r'_3 + \\ + C_2\,r_3 + etc.$$

Differenciando em relação a y, temos do mesmo modo

$$\frac{dF}{dy} = B + C\frac{dz}{dy} + A_1\frac{dp_1}{dy} + B_1\frac{dq_1}{dy} + \\ + A_2\frac{dp_2}{dy} + B_2\frac{dq_2}{dy} + C_2\frac{dr_2}{dy} + etc.$$

ou:

$$(a'') \qquad \frac{dF}{dy} = B + Cq_1 + A_1\,r_2 + B_1\,q_2 + A_2\,r_3 + B_2\,q_3 + \\ + C^2\,r'_3 + etc.$$

Tomando agora a variação de F, temos:

$$F = A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z + A_1\,\delta p_1 + B_1\,\delta q_1 + \\ + A_2\,\delta p_2 + B_2\,\delta q_2 + C_2\,\delta r_2 + etc.$$

Substituindo este valor e os valores (a') e (a'') na expressão affecta da dupla integração, resulta:

$$(a''') \qquad \left[\delta F - \frac{dF}{dx}\,\delta x - \frac{dF}{dy}\,\delta y\right] = \\ = C(\delta z - p_1\,\delta x - q_1\,\delta y) + A_1\,(\delta p_1 - p_2\,\delta x - r_2\,\delta y) + \\ + B_1\,(\beta q_1 - r_2\,\beta x - q_2\,\beta y) + \\ + A_2\,(\delta p_2 - p_3\,\delta x - r_3\,\delta y) + B_2\,(\delta q_2 - r'_3\,\delta x - q_2\,\delta y) + \\ + C_2\,(\delta r_2 - \delta r_3\,x - r'_3\,\delta y) + etc.$$

Considerando a primeira integração do primeiro termo em relação a x e praticando o processo de integração por partes, teremos:

$$\int F\,dy\,d.\,\delta x = F\,dy\,\delta x - \int \frac{dF}{dx}\,dx.\,dy\,\delta x$$

d'onde:

$$\iint F\,dy\,d.\,\delta x = \int F\,dy\,\delta x - \iint \frac{dF}{dx}.\,dx.\,dy.\,\delta x.$$

Procedendo do mesmo modo com o segundo termo, porém em relação a y, resulta:

$$\iint F\,dx\,d.\,\delta y = \int F\,dx\,\delta y - \iint \frac{dF}{dx}\,dy.\,dx\,\delta x.$$

Substituindo estes valores em (2), temos:

$$\iint F\,\delta\,(dx\,dy) = \int F\,dy\,\delta x + \int F\,dx\,\delta y - \iint \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,\delta x -$$
$$- \iint \frac{dF}{dy}\,dy\,dx\,\delta y.$$

Substituindo este valor em (1), resulta:

$$\text{(c)} \qquad \delta \iint F\,dx\,dy = \int F\,dy\,\delta x + \int F\,dx\,\delta y +$$
$$+ \iint \left[\delta F - \frac{dF}{dx}\,\delta x - \frac{dF}{dy}\,\delta y\right] dx\,dy$$

Calculemos a differença affecta da dupla integração.

Fazendo:

$$\frac{dz}{dx} = p_1,\quad \frac{d^2x}{dx^2} = p_2,\quad \frac{d^3z}{dx^3} = p_3,\ etc.$$
$$\frac{dz}{dy} = q_1,\quad \frac{d^2z}{dy^2} = q_2,\quad \frac{d^3z}{dx^3} = q_3,\ etc.$$
$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = r_2,\quad \frac{d^3z}{dx^2\,dy} = r_3,\quad \frac{d^3z}{dy^2\,dx} = r^1{}_3,\ etc.$$

temos:

$$p_2 = \frac{dp_1}{dx},\quad p_3 = \frac{dp_2}{dx},\quad p_4 = \frac{dp_3}{dx},\ etc.$$
$$q_2 = \frac{dq_1}{dy},\quad q_3 = \frac{dq_2}{dy},\quad q_4 = \frac{dq_3}{dy},\ etc.$$
$$r_2 = \frac{dp_1}{dy} = \frac{dq_1}{dx},\quad r_3 = \frac{dr_2}{dx},\ etc.$$

Tomando a differencial da formação F, teremos:

$$dF = A\,dx + B\,dy + C\,dz + A_1\,dp_1 + B_1\,dq_1 + A_2\,dp_2 + B_2\,dq_2 + \\ + C_2\,dr_2 + A_3\,dp_3 + B_3\,dq_3 + C_3\,dr_3 + etc.$$

Considerando a differencial sómente em relação a x, temos:

$$\frac{dF}{dx} = A + C\frac{dz}{dx} + A_1\frac{dp_1}{dx} + B_1\frac{dq_1}{dx} + \\ + A_2\frac{dp_2}{dx} + B_2\frac{dq_2}{dx} + C_2\frac{dr_2}{dx} + etc.$$

$$(a') \qquad \frac{dF}{dx} = A + Cp_1 + A_1 p_2 + B_1 r_2 + A_2 p_3 + B_2 r_3 + \\ + C_2 r_3 + etc.$$

Differenciando em relação a y, temos do mesmo modo:

$$\frac{dF}{dy} = B + C\frac{dz}{dy} + A_1\frac{dp_1}{dy} + B_1\frac{dq_1}{dy} + \\ + A_2\frac{dp_2}{dy} + B_2\frac{dq_2}{dy} + C_2\frac{dr_2}{dy} + etc.$$

ou:

$$(a'') \qquad \frac{dF}{dy} = B + Cq_1 + A_1 r_2 + B_1 q_2 + A_2 r_3 + B_2 q_3 + \\ + C_2 r_3 + etc.$$

Tomando agora a variação de F, temos:

$$\delta F = A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z + A_1\,\delta p_1 + B_1\,\delta q_1 + \\ + A_2\,\delta p_2 + B_2\,\delta q_2 + C_2\,\delta r_2 + etc.$$

Substituindo este valor e os valores (a) e (a'') na expressão affecta da dupla integração, resulta:

$$(a\,) \qquad \left[\delta F - \frac{dF}{dx}\,\delta x - \frac{dF}{dy}\,\delta y\right] = \\ C(\delta z - p_1\,\delta x - q_1\,\delta y) + A_1(\delta p_1 - p_2\,\delta x - r_2\,\delta y) + \\ + B_1(\delta q_1 - q_2\,\delta x - s_2\,\delta y) + \\ + A_2(\delta p_2 - p_3\,\delta x - r_3\,\delta y) + B_2(\delta q_2 - r_3\,\delta x - s_3\,\delta y) + \\ + C_2(\delta r_2 - \delta r_3\,\delta x - r_3\,\delta y) + etc.$$

Calculemos agora a partir do segundo termo desta expressão as formulas comprehendidas pelos parenthesis. Para obter isto temos que determinar as variações

$$\delta p_1, \quad \delta q_1, \quad \delta p_2, \quad \delta q_2, \quad etc.$$

o que nos dá:

$$\delta p_1 = \delta \frac{dz}{dx} = \frac{dx\,\delta dz - dz\,\delta dx}{dx_2} = \frac{d\,\delta z - p_1\,d\,\delta x}{dx}$$

d'onde:

$$\delta p_1 - p_2\,\delta x - r_2\,\delta y = \frac{d\,\delta z - p_1\,d\,\delta x}{dx} -$$

$$- \frac{dp_1}{dx}\,\delta x - \frac{dq_1}{dx}\,\delta y = \frac{d\,[\delta z - p_1\,\delta x - q_1\,\delta y]}{dx}$$

$$\delta q_1 = \delta \frac{dz}{dy} = \frac{dy\,\delta dz - dz\,\delta dy}{dy^2} = \frac{d\,\delta z - q_1\,d\,\delta y}{dy}$$

d'onde:

$$\delta q_1 - r_2\,\delta x - q_2\,\delta y = \frac{d\,\delta z - q_1\,d\,\delta y}{dy} -$$

$$- \frac{dp_1}{dy}\,\delta x - \frac{dq_1}{dy}\,\delta y = \frac{d\,[\delta z - p_1\,\delta x - q_1\,\delta y]}{dy}$$

$$\delta p_2 = \delta \frac{dp_1}{dx} = \frac{dx\,\delta dp_1 - dp_1\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\,\delta p_1 - p_2\,d\,\delta x}{dx}$$

d'onde:

$$\delta p_2 - p_3\delta x - r_3\delta y = \frac{d\,\delta p_1 - p_2\,d\,\delta x}{dx} -$$

$$- \frac{dp_2}{dx}\,\delta x - \frac{dr_2}{dx}\,\delta y = \frac{d\,[\delta p_1 - p_2\,\delta x - r_2\,\delta y]}{dx} =$$

$$= \frac{d^2\,[\delta z - p_1\,\delta x - q_1\,\delta y]}{dx^2}$$

$$\delta q_2 = \delta \frac{dq_1}{dy} = \frac{dy\,\delta dq_1 - dq_1\,\delta dy}{dy^2} = \frac{d\,\delta q_1 - q_2\,d\,\delta y}{dy}$$

d'onde :

$$\delta q_2 - r'_3 \delta x - q_3 \delta y = \frac{d\,\delta q_1 - q_2\, d\,\delta y}{dy} -$$

$$- \frac{dr_2}{dy} \delta x - \frac{dq_2}{dy} \delta y =$$

$$= \frac{d\,[\delta q_1 - q_2 \delta y - r_2 \delta x\,]}{dy} = \frac{d^2\,[\,\delta z - p_1 \delta x - q_1 \delta y]}{dy^2}$$

$$\delta r_2 = \delta \frac{dp_1}{dy} = \frac{dy\,\delta dp_1 - dp_1\,\delta\,dy}{dy} = \frac{\delta\,dp_1}{dy} - \frac{r_2}{dy} - d\,\delta y$$

d'onde :

$$\delta r_2 - r_3 \delta x - r'_3 \delta y = \frac{\delta\,dp_1}{dy} - \frac{r_2}{dy}\, d.\,\delta y -$$

$$- \frac{dp_2}{dy} \delta x - \frac{dr_2}{dy} \delta y =$$

$$= \frac{d\,[\delta p_1 - r_2 \delta y - p_2 \delta x]}{dy} = \frac{d^2\,[\delta z - p_1 \delta x - q_1 \delta y]}{dx\;dy}$$

e assim por deante.

Fazendo :

$$\delta z - p_1 \delta x - q_1 \delta y = u$$

e substituindo estes valores na expressão *(a'')*, resulta :

(m) $$\left[\delta F - \frac{dF}{dx} \delta x - \frac{dF}{dy} \delta y\right] =$$

$$= C\,u + A_1 \frac{du}{dx} + B_1 \frac{du}{dy} + A_2 \frac{d^2u}{dx^2} + B_2 \frac{d^2u}{dy^2} +$$

$$+ C_2 \frac{d^2u}{dx\,dy} + A_3 \frac{d^3u}{dx^3} + B_3 \frac{d^3u}{dy^3} + C_3 \frac{d^3u}{dx^2\,dy} +$$

$$+ C_3 \frac{d^3u}{dy^2\,dx} + etc.$$

d'onde :

$$\iint \left[\delta F - \frac{dF}{dx} \delta x - \frac{dF}{dy} \delta y\right] dx\,dy =$$

$$= \iint C\,u\,dx\,dy + \iint A_1 \frac{du}{dx}\,dx\,dy + \iint B_1 \frac{du}{dy}\,dy\,dx +$$

$$+ \iint A_2 \frac{d^2u}{dx^2}\,dx\,dy +$$

$$+ \iint B_2 \frac{d^2u}{dy^2}\,dx\,dy + \iint C_2 \frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy + etc.$$

ra desembaraçar as integraes dos termos affectos do signal de differenciação e variação utilisaremos a inte- por partes, o que nos dá:

$$\iint A_1\, dx\, dy\, \frac{du}{dx} = \int A_1\, u\, dy -$$
$$- \iint u\, dy\, \frac{dA_1}{dx}\, dx.$$

$$\iint B_1\, dx\, dy\, \frac{du}{dy} = \int B_1\, u\, dx -$$
$$- \iint u\, dx\, \frac{dB_1}{dy}\, dy.$$

$$\iint A_2\, \frac{d^2u}{dx^2}\, dx\, dy = \int A_2\, \frac{du}{dx}\, dy -$$
$$- \iint \frac{du}{dx}\, dy\, \frac{dA_2}{dx}\, dx =$$
$$= \int A_2\, \frac{du}{dx}\, dy - \int u\, dy\, \frac{dA_2}{dx} +$$
$$+ \iint u\, dy\, dx\, \frac{d^2 A_2}{dx^2}.$$

$$\int B_2\, \frac{d^2u}{dy^2}\, dx\, dy = \int B_2\, \frac{du}{dy}\, dx - \int u\, dx\, \frac{dB_2}{dy} +$$
$$+ \iint u\, dy\, dx\, \frac{d^2 B_2}{dy^2}.$$

$$\iint C_2\, \frac{d_2u}{dx\, dy}\, dx\, dy = \int C_2\, \frac{du}{dx}\, dx -$$
$$- \iint \frac{du}{dx}\, dx\, \frac{d\, C_2}{dy}\, dy =$$
$$= C_2 - \int u\, \frac{d\, C_2}{dx}\, dx - \int u\, \frac{d\, C_2}{dy}\, dy +$$
$$+ \iint u\, \frac{d^2C}{dy\, dx}\, dx\, dy.$$

6.ª
$$\iint A_3 \frac{d^2u}{dx^2}\, dx\, dy = \int A_3 \frac{d^2u}{dx^2}\, dy -$$
$$- \iint \frac{d^2u}{dx^2} \frac{dA_3}{dx} .\, dx\, dy = \int A_3 \frac{d^2u}{dx^2}\, dy -$$
$$- \int \frac{du}{dx}\, dy \frac{dA_3}{dx} + \iint \frac{du}{dx} .\, dy \frac{d^2A_3}{dx^2}\, dx =$$
$$= \int A_3 \frac{d^2u}{dx^2}\, dy - \int dy \frac{du}{dx} .\, \frac{dA_3}{dx} + \int u\, dy \frac{d^2A_3}{dx^2} -$$
$$- \iint u\, dx\, dy \frac{d^2A_3}{dx^2} .$$

7.ª
$$\iint B_3 \frac{d^2u}{dy^2}\, dx\, dy = \int B_3\, dx \frac{d^2u}{dy^2} - \int dx \frac{du}{dy} \frac{dB_3}{dy} +$$
$$+ \int u\, dx .\, \frac{d^2B_3}{dy} - \iint u\, dx\, dy \frac{d^2B_3}{dy^2} .$$

8.ª
$$\iint C_3\, dx\, dy \frac{d^2u}{dx^2\, dy} = \int C_3\, dx \frac{d^2u}{dx^2} -$$
$$- \iint dx\, dy \frac{d^2u}{dx^2} .\, \frac{dC_3}{dy} = C_3 \frac{du}{dx} -$$
$$- \int \frac{du}{dx} .\, \frac{dC_3}{dx}\, dx -$$
$$- \int dy \frac{du}{dx} .\, \frac{dC_3}{dy} + \iint dy\, dx \frac{du}{dx} .\, \frac{d^2C_3}{dy\, dx} = C_3 \frac{du}{dy} -$$
$$- u \frac{dC_3}{dx} + \int u \frac{d^2C_3}{dx^2} .\, dx - \int dy \frac{du}{dx} .\, \frac{dC_3}{dy} +$$
$$+ \int u\, dy \frac{d^2C}{dx\, dy} - \iint dy\, dx\, u \frac{d^3C_3}{dx^2\, dy} .$$

9.ª
$$\iint dx\, dy \frac{d^3u}{dy^2\, dx} C'_3 = C'_3 \frac{du}{dy} - u \frac{dC'_3}{dy} +$$
$$+ \int u \frac{d^2C'_3}{dy}\, dy - \int dx \frac{du}{dy} \frac{dC'_3}{dx} +$$
$$+ \int u\, dx \frac{d^2C'_3}{dy\, dx} - \iint dy\, dx\, u \frac{d^3C'_3}{dy^2\, dx} .$$

e assim por deante.

Substituindo estes valores na expressão *(m)*, e depois o valor de *(m)* na expressão *(c)*, resulta:

$$
\begin{aligned}
(H)\quad \delta \iint F\,dx\,dy = u\left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + etc. - \frac{dC'_3}{dy} + etc.\right] + \\
+ \frac{du}{dx}\left[C_3 - etc.\right] + etc. + \\
+ \frac{du}{dy}\left[C'_3 - etc.\right] + etc. + \int F\,dx\,\delta y + \int F\,dy\,\delta x + \\
+ \int u\,dy\left[A_1 - \frac{dA_2}{dx} - \frac{dC_2}{dy} + \frac{d^2A_3}{dx^2} + \right. \\
\left. + \frac{d^2C_3}{dx\,dy} - etc.\right] + \int u\,dx\left[B_1 - \frac{dB_2}{dy} - \frac{dC_2}{dx} + \right. \\
\left. + \frac{d^2B_3}{dy^2} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - etc.\right] + \\
+ \int dy\,\frac{du}{dx}\left[A_2 - \frac{dA_3}{dx} - \frac{dC_3}{dy} + etc.\right] + \\
+ \int dx\,\frac{du}{dy}\left[B_2 - \frac{dB_3}{dy} - \frac{dC'_3}{dx} + etc.\right] + \\
+ \int \frac{d^2u}{dx^2}\,dy\left[A_3 - etc.\right] + \int dx\,\frac{d^2u}{dy^2}\left[B_3 - etc.\right] + etc. + \\
+ \iint u\,dx\,dy\left[C - \frac{dA_1}{dx} + \frac{d^2A_2}{dx^2} - etc. + - \frac{dB_1}{dy} + \right. \\
\left. + \frac{d^2B^2}{dy^2} - etc. + \frac{d^2C_2}{dx\,dy} - \frac{d^2C_3}{dy\,dx^2} + etc.\right]
\end{aligned}
$$

Como vemos, a expressão da variação da integral dupla compõe-se de tres partes, uma livre do signal de integração, outra affecta de uma só integração e, finalmente, a terceira affecta de uma dupla integração. Igualando a zero as expressões affectas do signal de integração, as equações que resultam exprimirão as condições necessarias para que uma formação qualquer a tres variaveis, contendo as differenciaes parciaes seja integravel; representando então a parte livre do signal de integração a variação da integral considerada.

Estabelecido este estudo fundamental vamos agora co-
rar, primeiramente sob o ponto de vista geral e depoi-
nto ás applicações especiaes, as questões de *maxima*
inima que determinaram a creação do calculo das va-
ões, questões essas tratadas por Newton, os Bernouilli,
r e finalmente por Lagrange que, pode-se dizer, esgotou
sumpto.

No calculo differencial, como sabe-se, semelhantes in-
igações suppoem sempre a consideração como rela-
a uma mesma curva ou superficie, ou por outra sup-
m que em todo o correr da indagação o modo de
ção entre as variaveis ou a equação da fórma con-
rada é a mesma, e procura-se determinar quaes os pontos
curva ou superficie dada que apresentam um *maximum*
m *minimum*; no calculo das variações o modo de relação
e as variaveis não é conhecido, isto é, não é conhecida a
ação da fórma que constitue o objecto essencial da ques-
e procura-se, dentro de certos limites, entre todos os
los por que as variaveis podem se achar ligadas, qual o
representa uma curva ou uma superficie para a qual
maximum ou *minimum* uma propriedade geral expressa
uma integral; de modo que neste caso a indagação não
põe sempre a mesma curva ou superficie, porém diffe-
tes curvas ou superficies dentre as quaes é necessario
acterisar a que gosa do *maximum* ou *minimum* da pro-
dade traduzida pela integral definida.

Para bem caracterisar estes dous aspectos da questão,
sideremos os casos mais simples a elles relativos.

Dada a equação da curva:

$$y = f(x)$$

da qual procura-se determinar os maxima ou minima,
uestão pelo calculo differencial consiste em determinar-se
tre a infinidade de pontos da curva (1) aquelles para os quaes
alor da ordenada é *maximum* ou *minimum*, e para isso

differencia-se a equação (1), o que equivale a passar de um ponto da curva para um outro infinitamente proximo nessa mesma curva. Si o ponto considerado corresponde a um valor *maximum* ou *minimum* da ordenada, conforme a observação de Kepler, essa ordenada na proximidade desse ponto será estacionaria, o que importa em manter ella ahi a mesma grandeza. Por conseguinte sob o ponto de vista algebrico essa constancia do valor da ordenada e que caracterisa os dous estados criticos, será dada pela relação

$$dy = o$$

A questão fica assim referida a eliminar-se as differenciaes auxiliares desta relação utilisando para isso a equação (1) da curva dada, d'onde resultará a equação que deve dar os valores correspondentes ao *maximum* ou *minimum*.

No calculo das variações, formulada a propriedade geral pela integral:

$$\int_a^b F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots\right) dx \qquad (3)$$

entre os limites a e b procura-se determinar dentre a infinidade de curvas comprehendidas na equação hypothetica

$$f(x, y, \alpha) = o$$

qual a que torna a integral (3) um *maximum* ou um *minimum*. Neste caso, pois, não passamos, como no caso anterior de um ponto a um outro de uma mesma curva, porém de uma curva para outra entre os limites a e b.

A passagem de um ponto para outro infinitamente proximo obtem-se, sob o primeiro aspecto, pela differenciação, a passagem de uma curva para outra, infinitamente proxima obtem-se, sob o segundo aspecto, pela *variação*.

Suppondo na formação f x e y variando em virtude da variação do parametro α obter-se-ha uma infinidade de

curvas, e a questão está em saber qual dellas ou qual dos modos de relação entre x e y que dahi resulta, torna *maximum* ou *minimum* a expressão (3).

Ora sendo F uma formação de x e y e sendo estas variaveis suppostas dependentes do parametro α, é claro que F póde ser supposta uma formação de α e, segundo a observação de Kepler, sendo a formação estacionaria nas proximidades do *maximum* ou *minimum*, segue-se que para taes valores a modificação δF proveniente da variação $\delta\alpha$ deve ser nulla, o que nos dá para caracterisar os dous estados criticos a condição geral:

$$\int \delta F\, dx = o \text{ ou } \delta \int F\, dx = o$$

Assim como na questão considerada sob o ponto de vista do calculo differencial a condição.

$$(^2) \quad dy = o$$

Contem as coordenadas dos pontos procurados, isto é, a solução da questão, assim tambem, sob o segundo aspecto a condição:

$$(^3) \quad \delta \int_a^b F\, dx = o$$

contém a equação da curva procurada; no primeiro caso a eliminação das differenciaes auxiliares da relação (2) é obtida pelo calculo differencial utilisando a equação dada da curva; no segundo, como veremos, a eliminação das differenciaes auxiliares é obtida com a intervenção do calculo integral. Quanto á distincção entre a existencia do *maximum* ou do *minimum* além de sua extrema complicação, considerada a indagação sob este segundo aspecto, perde ella toda e qualquer importancia pois o proprio enunciado do problema especifica ordinariamente o caso critico correspondente.

Considerada sob o ponto de vista do calculo das variações, a questão dos maxima e minima apresenta ainda um typo que convem mencionar, caracterisado pela subordinação do *maximum* ou *minimum* da integral (4) á condição de manter-se constante entre os mesmos limites a e b uma outra integral:

$$(5) \int_a^b F_1 \, dx$$

isto é, procura-se determinar dentre os modos de relação entre x e y e que para os limites a e b dão á integral (5) um mesmo valor qual aquelle a que, entre os mesmos limites, corresponde um *maximum* ou *minimum* da integral (4).

Este caso, relativo ás questões comprehendidas pela denominação geral de problema dos *isoperimetros*, não exige porém nenhuma noção nova fundamental, podendo como veremos, ser sempre referido ao caso geral como mostrou Euler.

Por conseguinte algebricamente a determinação do *maximum* ou *minimum* da integral

$$\int F \, dx$$

consiste na equação da condição caracteristica:

$$\delta \int F \, dx = o$$

tendo-se em vista os differentes modos de constituição da formação F, e a natureza dos limites entre os quaes é considerada a integral.

Seja a formação dada:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) dx$$

A condição de *maximum* ou *minimum* será :

$$(1) \qquad \delta \int F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) dx = o$$

Substituindo o valor desta variação por sua expressão (D) anteriormente obtida, temos :

$$F\,\delta x + \delta u\left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + \frac{d^2C_4}{dx^2} - \text{etc.}\right] + \frac{d.\delta u}{dx}\left[C_3 - \frac{dC_4}{dx} + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2C_5}{dx^2} - \text{etc.}\right] + \frac{d^2\delta u}{dx^2}\left[C_4 - \frac{dC_5}{dx} + \text{etc.}\right] + \text{etc.} +$$

$$+ K + \int dx\,\delta u\left[C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - \frac{d^3C_4}{dx^3} + \text{etc.}\right] = o$$

sendo K a constante proveniente das integrações effectuadas.

Como esta relação deve ter logar quaesquer que sejam δx δy, resulta, para condições de *maximum* ou *minimum* :

$$(2) \qquad F\,\delta x + \delta u\left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + \text{etc.}\right] +$$

$$+ \frac{d\,\delta u}{dx}\left[C_3 - \frac{dC_4}{dx} + \text{etc.}\right] + \frac{d^2\,\delta u}{dx^2}\left[C_4 - \text{etc.}\right] + K = o$$

$$(3) \qquad C_1 - \frac{d\,C_2}{dx^2} + \frac{d^2\,C_3}{dx^2} - \frac{d^3\,C_4}{dx^3} + \ldots\ldots +$$

$$\pm \frac{d^n\,C_{n+1}}{dx^n} = o$$

A primeira destas equações é relativa aos limites da integral e a segunda nos dá o modo de dependencia entre x e y ou a equação da curva para a qual a propriedade expressa pela integral considerada é um *maximum* ou um *minimum*. Em geral esta ultima equação poderá conter

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$$

pois que sendo

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

a derivada de ordem mais elevada das que entram na formação F' e contendo C_{n+1} essa derivada, a formação

$$\frac{d^n C_{n+1}}{dx^n}$$

dará necessariamente a derivada

$$\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}},$$

Assim, pois, a integração completa da equação (3) dará $2n$ parametros arbitrarios e o resultado dessa operação póde ser representado pela equação:

$$(4) \qquad \varphi\left(x, y, c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_{2n}\right) = o$$

Consideremos agora a outra condição de *maximum* ou *minimum* representada pela expressão (2). Substituindo ahi δu por seu valor

$$(\delta y - p\,\delta x),$$

temos:

$$(5) \qquad F\,\delta x + (\delta y - p\,\delta x)\left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + \frac{d^2 C_4}{dx^2} - \text{etc.} + \right] +$$

$$+ (\delta p - q\,\delta x)\left(C_3 - \frac{dC_4}{dx} + \frac{d^2 C_5}{dx^2} - \frac{d^3 C_6}{dx^3} + \text{etc.}\right] +$$

$$+ \text{etc.} + k = o$$

Designando por

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$$

os valores de x e y relativos ao começo e fim da integral, por

$$F_1,\ M_1,\ N_1,\ P_1,\ \text{etc.},\ F_2,\ M_2,\ N_2,\ P_2,\ \text{etc.}$$

formações conhecidas, as primeiras dos valores :

$$x_1,\ y_1,\ p_1,\ q_1,\ \text{etc.},$$

e as segundas dos valores :

$$x_2,\ y_2,\ p_2,\ q_2,\ \text{etc};$$

a formação (5) póde ser substituida pela seguinte :

$$(6)\quad \left[F_2\,\delta x_2 + M_2\,\delta y_2 + N_2\,\delta p_2 + \ldots\ldots + S_2\,\delta\,\frac{d^{n-1}\,y_2}{dx_2^{\,n-1}} \right] -$$

$$-\left[F_1\,\delta x_1 + M_1\,\delta x_1 + N_1\,\delta p_1 + \ldots\ldots + S_1\,\delta\,\frac{d^{n-1}\,y_1}{dx_1^{\,n-1}} \right] = o$$

Si as quantidades :

$$(m)\qquad x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2,\ \text{etc.}$$

são constantes dadas pela natureza da questão, as variações :

$$\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta y_1,\ \delta y_2,\ \delta p_1,\ \delta p_2,\ \delta q_1,\ \delta q_2\ \text{etc.}$$

são todas nullas, a equação (6) será por si mesma satisfeita, e então a equação (3) constituirá a solução completa da questão. Para determinar-se neste caso as constantes da solução do problema, representado pela equação (4), substitue-se nessa equação x e y por seus valores dados

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$$

e differencia-se successivamente ($n-1$) vezes, o que nos dá

$$(v)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi\,(\,x_1,\ y_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ldots\ c_{2n}\,) = o \\ \varphi\,(\,x_2,\ y_2,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ldots\ c_{2n}\,) = o \\ \varphi'\,(\,x_1,\ y_1,\ y'_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ldots\ c_{2n}\,) = o \\ \varphi'\,(\,x_2,\ y_2,\ y'_2,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ldots\ c_{2n}\,) = o \\ \qquad\qquad \varphi''_1 = o,\quad \varphi''_2 = o \\ \qquad\qquad \varphi_1''' = o\quad \varphi_2''' = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \varphi_1^{n-1} = o\quad \varphi_2^{n-1} = o \end{array} \right.$$

Tem-se assim $2n$ equações entre as quantidades conhecidas dadas e as constantes, e pode-se por meio dellas determinar essas constantes.

Si nenhuma das quantidades (m) é dada, suas variações serão independentes e indeterminadas e, em tal caso, a equação (6) só será satisfeita igualando-se separadamente a zero cada um dos coefficientes :

$$F_1,\ F_2,\ M_1,\ M_2,\ N_1,\ N_2,\ etc.$$

o que nos dará as

$$(\ 2\ n + 2\ )$$

equações :

$$F_1 = o,\ F_2 = o,\ M_1 = o,\ M_2 = o,\ etc.$$

as quaes combinadas com as $2n$ que resultam da differenciação successiva da equação (4) nos permittiriam determinar as

$$(\ 2\ n + 2\ )$$

quantidades relativas aos limites e as $2n$ constantes arbitrarias.

Si as quantidades (m) não são independentes, porém acham-se ligadas por um certo modo de relação dado pelas m equações :

$$(v')\ f_1 = o,\ f_2 = o,\ \psi_1 = o,\ \psi_2 = o,\ \beta_1 = o,\ \beta_2 = o,\ etc.$$

toma-se, neste caso, as variações destas equações, o que nos dá :

$$\delta f_1 = o,\ \delta f_2 = o,\ \delta\psi_1 = o\ \delta\psi_2 = o\ etc.$$

e utilisando estas expressões que nos dão as relações entre as variações

$$\delta x_1,\ \delta x_2,\ \delta y_1,\ \delta y_2,\ \delta p_1,\ \delta p_2\ etc.$$

podemos exprimir m variações em formação das

$$(\ 2n + 2 - m\ )$$

outras restantes, e substituindo esses valores na equação (6) eliminaremos desta equação o maior numero possivel de variações. Feito isto, igualaremos a zero os respectivos coefficientes das variações restantes, que assim ficam arbitrarios. Resultará desta fórma

$$(2n + 2 - m)$$

equações que reunidas as equações *(v)* e *(v')* nos darão

$$(4n + 2)$$

equações com as quaes determinaremos as $2n$ constantes arbitrarias e as

$$(2n + 2)$$

quantidades relativas aos limites.

Para esclarecer estas considerações tomemos um exemplo.

Supponhamos á formação F a fórma:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx .$$

A condição do maximum ou minimum será:

$$\delta \int F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx = o$$

As equações (2) e (3) que representam as condições caracteristicas dos estados criticos, serão para este caso:

$$(a) \qquad C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d_2 C_3}{dx^2} = o$$

$$(b) \qquad F\delta x + \delta u \left[C_2 - \frac{d^2 C_3}{dx^2}\right] + \frac{d\delta u}{dx} C_3 + K = o$$

Como C_3, em geral, contém

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2},$$

equação (a) poderá conter a derivada

$$\frac{d^4y}{dx^4},$$

modo que essa equação completamente integrada dará atro constantes arbitrarias.

Seja o resultado da integração representado por:

$$(a') \qquad \varphi(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4) = o$$

Substituindo na equação (b) δu por seu valor:

$$(\delta y - p\,\delta x)$$

sulta :

$$(a'') \quad \left[F - \left(C_2 - \frac{d^2C_3}{dx^2}\right)p - qC_3\right]\delta x + \left[C_2 - \frac{d^2C_3}{dx^2}\right]\delta y + C_3\delta p + K = o$$

Designando por x_1, y_1, x_2, y_2 os valores de x e y para os nites da integral, e representando por M_1, M_2, N_1, N_2, $_1$, P_2, formações conhecidas desses valores, a equação (a'') ode ser substituida pela seguinte:

$$(b'') \quad \left[M_2\,\delta x_2 + N_2\,\delta y_2 + P_2\,\delta p_2\right] - \left[M_1\delta x_1 + N_1\,\delta y_1 + P_1\,\delta p_1\right] = o$$

Si as coordenadas dos pontos extremos : x_1, y_1, x_2, y_2, em como as tangentes p_1 e p_2 são quantidades dadas, eterminadas, teremos :

$$\delta x_1 = o,\ \delta x_2 = o,\ \delta y_1 = o,\ \delta y_2 = o,\ \delta p_1 = o,\ \delta p_2 = o$$

Neste caso a equação (b'') se verificará por si mesma, e ntão a equação (a) representará a solução completa da nestão.

As constantes da equação (a'), provenientes da integração a equação (a), obtêm-se substituindo-se nesta equação x e y

por seus valores extremos e differenciando as equações resultantes, o que nos dá:

$$(e)\quad \begin{cases} \varphi(x_1, y_1, c_1, c_2, c_3, c_4) = o \\ \varphi(x_2, y_2, c_1, c_2, c_3, c_4) = o \\ \varphi'(x_1, y_1, p_1, c_1, c_2, c_3, c_4) = o \\ \varphi'(x_2, y_2, p_2, c_1, c_2, c_3, c_4) = o \end{cases}$$

Utilisando estas quatro equações determinariamos as constantes

$$c_1, c_2, c_3 \text{ e } c_4,$$

Si forem sómente dadas as coordenadas

$$x_1\ y_1, x_2, y_2,$$

dos pontos extremos, a condição (b'') de maximum ou minimum será nesta hypothese:

$$P_2\, \delta p_2 - P_1\, \delta p_1 = o$$

e como δp_2 é em taes condições independente de δp_1 resulta:

$$(e')\qquad P_2 = o,\ P_1 = o$$

Substituindo nas equações (e) x e y por seus valores dados, relativos aos limites, e por p_1 e p_2 os seus valores tirados da equação (e'), teremos quatro equações que nos permittirão determinar as quatro constantes.

Supponhamos agora a curva procurada como devendo achar-se entre as curvas que passam pela curva C dada pela equação:

$$(n)\quad y = f(x)$$

no começo da integral, e pela curva C' dada pela equação

$$(n')\quad y = f_1(x)$$

no fim da integral. Não sendo fixos os pontos de intersecção das curvas intermediarias com as curvas limites, sempre que

mudarmos de uma das curvas intermediarias para uma outra infinitamente proxima as coordenadas desses pontos soffrerão uma variação, que sendo determinada por um deslocamento desses pontos sobre as curvas C e C', necessariamente devem apresentar as mesmas relações que as differenciaes nessas curvas, sendo essas relações dadas pelas equações (n) e (n'). Substituindo, pois, na equação (n), x e y por x_1 e y_1, na equação (n') x e y por x_2 e y_2, e tomando as variações temos:

$$y_1 = f(x_1) \qquad y_2 = f_1(x_2)$$

$$\delta y_1 = f'(x_1)\,\delta x_1 \qquad \delta p_1 = f''(x_1)\,\delta x_1$$

$$\delta y_2 = f_1'(x_2)\,\delta x^2 \qquad \delta p_2, = f_1''(x_2)\,\delta x_2$$

Substituindo estes valores na equação (b''), eliminaremos as variações

$$\delta y_1, \delta y_2, \delta p_1, \delta p_2,$$

e teremos uma equação da fórma:

$$L_1\,\delta x_1 + L_2\,\delta x_2 = o$$

D'onde

$$L_1 = o \quad L_2 = o$$

Substituindo nestas equações e nas equações (c), y_1, y_2, p_1 e p_2, por seus valores tirados das equações das curvas teremos seis equações que nos permittirão determinar as quatro constantes e as abcissas x_1 e x_2 dos pontos extremos.

Assim esclarecidas as considerações anteriores por este caso mais simples, continuemos a apreciação da questão geral.

Si a formação considerada F contiver uma ou mais das quantidades (m) é necessario na *variação* de F levar em conta as variações dessas quantidades, salvo o caso em que a natureza do problema as estabeleça como constantes.

Suppondo, por exemplo, que F contém

$$x_1 \text{ e } y_1,\ x_2 \text{ e } y_2,\ p_1 \text{ e } p_2,$$

designemos por

$$T_1,\ T_2,\ T'_1,\ T'_2,\ T_1'',\ T''_2$$

os coefficientes de

$$\delta x_1,\ \delta y_1,\ \delta x_2,\ \delta y_2,\ \delta p_1,\ \delta p_2$$

na expressão de δF. Embora

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ p_1 \text{ e } p_2$$

sejam consideradas constantes na expressão da differencial de F, si o problema considerado exigir que ellas tenham uma variação, será necessario juntar á variação de F ou δF termos da fórma

$$\delta x_1 \int T_1\, dx,\ \delta y_1 \int T'_1\, dx,\ \delta x_2 \int T_2\, dx,\ \delta y_2 \int T_1''\, dx,\ etc.$$

Representando por Q_1 e Q_2 os valores respectivos da primeira destas integraes para os limites da integral considerada, por Q'_1, Q'_2 os da segunda etc., teremos de juntar á equação dos limites (2), termos da fórma:

$$(Q_2 - Q_1)\,\delta x_1,\ (Q_2' - Q_1')\,\delta y_1,\ (Q_1'' - Q_1'')\ etc.$$

ficando a equação differencial da curva procurada ou a equação (3) a mesma.

Consideremos agora o caso relativo ás curvas da dupla curvatura, em que a formação dada F contém mais uma variavel z, dependente de x e suas derivadas, isto é, uma formação da fórma:

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\ldots\right) dx$$

Conforme o estudo anterior, para obtermos neste caso, a variação de F basta-nos juntar á expressão geral (D) termos

analogos aos correspondentes a y, de modo que a condição de maximum ou minimum será :

$$V + \int dx\, \delta u \left[C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - etc. \right] + \int dx\, \delta u'$$

$$\left[G' - \frac{dG''}{dx} + \frac{d^2G'''}{dx^2} - etc. \right] = o$$

Representando V nesta expressão o seguinte :

$$V = F\, \delta x + \delta u \left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + etc. \right] + \frac{d\, \delta u}{dx} \left[C_3 - \frac{dC_4}{dx} + etc. \right] +$$

$$+ etc, + \delta u' \left[G'' - \frac{dG'''}{dx} + etc. \right] + etc. + K,$$

sendo G' G'' G''' etc., os coefficientes de

$$\delta z,\ \delta \frac{dz}{dx},\ \delta \frac{d^2z}{dx^2}\ etc.$$

no desenvolvimento de δF, $\delta u'$ igual a

$$(\delta z - p'\, \delta x)\ e\ p' = \frac{dz}{dx}.$$

Fazendo as contracções :

$$\psi = C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - etc.$$

$$\psi_1 = G' - \frac{dG''}{dx} + \frac{d_2G'''}{dx^2} - etc.$$

teremos para expressão da condição de maximum ou minimum

$$V + \int \left[\psi\ \delta u + \psi_1\, \delta u' \right] dx = o \tag{9}$$

Substituindo δu e $\delta u'$ por seus valores :

$$(\delta y - p\, \delta x),\ (\delta z - p'\, \delta x)$$

temos :

$$V_1 + \int \left[\psi\, \delta y + \psi_1\, \delta z - (\psi p + \psi_1 p')\, \delta x \right] dx = o$$

[illegible] esta relação deve verificar-se, quaesquer que sejam [illegible] resulta para condições de maximum ou de mi-[illegible]

$$V_1 + K = o$$

$$\psi\, \delta y + \psi_1\, \delta z - (\psi\, p + \psi_1\, p')\, \delta x = o$$

Esta ultima equação nos dá:

$$\psi = o,\ \psi_1 = o,\ \psi p + \psi_1 p' = o$$

a terceira sendo satisfeita quando são as duas primeiras, as condições de maximum ou minimum serão, finalmente:

$$V_1 + K = o,\ \psi = o,\ \psi_1 = o$$

ou substituindo ψ e ψ_1 por seus valores:

$$(1') \qquad V_1 + K = o$$

$$(h) \quad \begin{cases} C_1 - \dfrac{dC_2}{dx} + \dfrac{d^2C_3}{dx^2} - etc. = o \\ G' - \dfrac{dG''}{dx} + \dfrac{d^2G'''}{dx^2} - etc. = o \end{cases}$$

As equações (h) integradas nos darão o modo de dependencia entre x, y e z que caracterisa a curva procurada, e as constantes que dessa operação resultam serão determinadas recorrendo-se ás condições relativas aos limites.

Representando por V_2 o valor de V_1 para o começo da integração e por V'_2 o seu valor para o fim desta integração a equação (1') dos limites será:

$$V_2 - V_2 = o$$

Vamos agora considerar o caso em que as coordenadas x, y e z acham-se ligadas por uma equação de condição. Supponhamos esta equação da fórma:

$$(g) \qquad \varphi(x, y, z) = o$$

Differenciando esta equação temos :

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dz}\,dz = o$$

Tomando a variação, temos:

$$\frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\,\delta z = o$$

Multiplicando a 1ª por δx, a segunda por dx e subtrahindo o primeiro resultado do segundo, resulta :

$$\frac{d\varphi}{dy}\Big[\,\delta y\,dx - dy\,\delta x\,\Big] + \frac{d\varphi}{dz}\Big[\,\delta z\,dx - dz\,\delta x\Big] = o$$

ou :

$$\frac{d\varphi}{dy}\Big[\,\delta y - p\,\delta x\,\Big] + \frac{d\varphi}{dz}\Big[\,\delta z - p'\,\delta x\Big] = o$$

d'onde:

$$\delta u' = -\frac{\dfrac{d\varphi}{dy} \times \delta u}{\dfrac{d\varphi}{dz}}$$

Substituindo este valor na equação (9) eliminaremos δz e teremos :

$$V_0 + \int\left[\psi\,\delta u - \frac{\psi_1\,\dfrac{d\varphi}{dy}\,\delta u}{\dfrac{d\varphi}{dz}}\right]dx = o$$

sendo V_0 o valor de V após a substituição.

Substituindo nesta ultima expressão δu por seu valor

$$(\,\delta y\,dx - dy\,\delta x\,),$$

teremos:

$$V_0 + \int\left[\psi - \frac{\psi_1\,\dfrac{d\varphi}{dy}}{\dfrac{d\varphi}{dz}}\right]\Big[\,\delta y\,dx - dy\,\delta x\,\Big]\,dx = o$$

As condições de maximum ou minimum serão :

$$Vo = o$$

$$\psi \frac{d\varphi}{dz} - \psi_1 \frac{d\varphi}{dy} = o$$

Eliminando desta ultima equação a variavel z por meio da equação (g) dada, teremos a equação differencial da curva procurada. Tal é o caso em que se trata de propriedades de maxima ou minima de curvas situadas sobre superficies.

Consideremos o caso em que sendo dada a formação differencial :

$$(1)\ \psi \left(x, y, z \ldots\ldots \varphi, dx, d^2x, \ldots\ldots dy, d^2y, \ldots\ldots d\varphi, d^2\varphi \ldots\ldots\right) = o$$

procura-se determinar quaes as relações entre as variaveis x, y, z.... quando a formação φ é um maximum ou um minimum.

Sendo φ dada pela integração da equação (1) é claro que essa formação conterá tantas constantes arbitrarias quantas são as unidades do numero que marca a ordem da equação (1), e, além disso, conterá integraes indefinidas cujos limites serão fixados pela natureza de cada questão particular.

Supponhamos que essas integraes comecem para os valores:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad etc. ;$$

os valores correspondentes de

$$\varphi, \quad d\varphi, \quad d^2\varphi, \quad etc. ,$$

serão assim formações dadas de

$$a, \ b, \ c, \ etc., \qquad da, \ db, \ dc, \ etc.,$$

e das constantes arbitrarias que entram na expressão de φ.

Representando, pois, por m o numero dessas constantes, isto é, representando por m a ordem differencial da equação (1) em relação a φ, os valores das quantidades

$$\varphi, \quad d\varphi, \quad d^2\varphi \ldots\ldots \quad d^{m-1}\varphi$$

serão arbitrarios e poderão ser considerados como dados quando

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c, \quad etc.$$

Sendo assim, suppondo que φ torna-se um maximum ou um minimum para

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1, \quad etc.,$$

a condição para qualquer desses estados criticos será :

$$\delta\varphi = 0$$

Considerando, pois, o primeiro membro da equação *(V)*, anteriormente estabelecida para este problema, correspondendo a esta hypothese, teremos :

$$[P' \, d\varphi]_f = 0$$

Sendo o segundo membro tambem igual a zero, e suppondo-o do mesmo modo relativo á mesma hypothese de valores, as condições de maximum ou minimum serão:

$$\Big[(P'_\varphi \, \delta\varphi)_c + etc. + (P'_x \, \delta x)_c + etc.\Big] -$$

$$-\Big[[P'_x \, \delta x]_f + etc. + [P'_y \, \delta y]_f + etc.\Big] = 0 \qquad \text{(w)}$$

$$P_x \, \delta x + P_y \, \delta y + P_z \, \delta z + etc. = 0 \qquad \text{(w')}$$

a ultima devendo ter logar quaesquer que sejam

$$\delta x, \qquad \delta y, \qquad \delta z, \qquad etc.$$

Si na natureza do problema não houver relação nenhuma entre as variaveis

$$x, \quad y, \quad z, \quad etc.,$$

as variações

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad etc.$$

serão independentes entre si e a equação *(u')* decompor-se-ha nas seguintes:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = 0, \quad etc.$$

Si entre

$$x, \quad y, \quad z, \quad etc.,$$

existirem relações, em tal caso será preciso eliminar da equação *(u')* o maior numero possivel de variações e igualar separadamente a zero os coefficientes das variações restantes.

Assim, por exemplo, si entre

$$x, \quad y, \quad z, \quad etc.,$$

tivermos a equação :

$$M\,dx + M_1\,dy + M_2\,dz + etc. = 0$$

tomando a variação, teremos :

$$M\,\delta x + M_1\,\delta y + M_2\,\delta z + etc. = 0$$

d'onde

$$\delta x = -\frac{M_1}{M}\,\delta y - \frac{M_2}{M}\,\delta z - etc.$$

Substituindo este valor na equação *(u')*, resulta:

$$\left(MP_y - M_1P_x\right)\delta y + \left(MP_z - M_2P_x\right)\delta z + etc. = 0.$$

Igualando a zero os coefficientes destas variações, resulta :

$$MP_y - M_1P_x = 0, \quad MP_2 - M_2P_x = 0, \quad etc.$$

Em qualquer destes casos a integração das equações que resultam da equação *(u')* nos dará a relação que deve ligar entre si

$$x, \quad y, \quad z, \quad etc.,$$

para que φ seja um maximum ou um minimum.

Estas integrações darão logar a um certo numero de constantes arbitrarias para cuja determinação recorre-se á equação *(u)* relativa aos limites.

Supponhamos que para os valores iniciaes da integral

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad etc.$$

o valor de φ seja representado por v, e sejam:

$$\begin{array}{llll} P'_v, & P''_v, & P'''_v, & etc. \\ P'_a, & P''_a, & P'''_a, & etc. \\ P'_b, & P''_b, & P'''_b, & etc. \\ & etc., & etc. & \end{array}$$

respectivamente as expressões para esses valores iniciaes dos coefficientes relativos a

$$\varphi, \quad x, \quad y, \quad z, \quad etc.$$

Representemos por

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad etc.$$

os valores de

$$x, \quad y, \quad z, \quad etc.$$

correspondentes ao limite superior da integração e por:

$$\begin{array}{lll} P'_{x_1}, & P''_{x_1}, & P'''_{x_1}, \quad etc. \\ P'_{y_1}, & P''_{y_1}, & P'''_{y_1}, \quad etc. \\ P'_{z_1}, & P''_{z_1}, & P'''_{z_1}, \quad etc. \\ & etc., & etc. \end{array}$$

as expressões, correspondentes a esses valores, dos coefficientes relativos a

$$x, \quad y, \quad z, \quad etc.$$

Mediante estas supposições a equação (u) póde escrever-se do seguinte modo:

$$(s) \quad \left| \begin{array}{l} P_x \delta x + \\ + P_x \delta dx + etc. + \\ + P_y \delta y + \\ + P_y \delta dy + etc. + \\ + P_z \delta z + \\ + P_z \delta dz + etc. + \\ + etc. + etc. \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} P'_{x_1} \delta x_1 + \\ + P_{x_1} \delta dx_1 + etc. + \\ + P'_{y_1} \delta y_1 + \\ + P_{y_1} \delta dy_1 + etc. + \\ + P'_{z_1} \delta z_1 + \\ + P_{z_1} \delta dz_1 + etc. + \\ + etc. + etc. \end{array} \right| = \left| \right|$$

Se pelo [illegible] do problema houver alguma relação dada entre os valores

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots \quad x_1, \quad etc.$$

[illegible] equação (s), utilisando [illegible] possivel de variações [illegible] os coefficientes d

ariações restantes, o que dará as condições necessarias á olução completa da questão.

Os valores

$$v, \ \delta v, \ etc., \ de \ \varphi$$

evendo ser suppostos dados, é necessario considerarmos ous casos :

1.º Elles podem ser dados immediatamente, independentemente de

$$a, \ b, \ c, \ etc.;$$

esta hypothese teremos :

$$\delta v = 0, \quad \delta\, dv = 0, \quad \delta\, d^2 v = 0, \quad etc.$$

2.º Esses valores podem ser formações dadas de

$$a, \ b, \ c, \ etc.,$$

de suas differenciaes ; neste caso teremos:

$$\delta v = L_1\, \delta a + L_2\, \delta b + L_3\, \delta c + etc.$$
$$\delta\, dv = L_1'\, \delta a + L_2'\, \delta b + L_3'\, \delta c + etc.$$
$$etc. \qquad etc.$$

lores que devem ser substituidos na equação *(s)*.

Si a formação φ cujo maximum ou minimum se prora contiver as quantidades

$$a, \ b, \ c, \ etc., \quad x_1, \ y_1, \ z_1, \ etc.$$

suas differenciaes ; em tal caso estas quantidades entrando ı equação differencial dada ψ, a variação $\delta\varphi$ conterá os seiintes termos em sua expressão :

$$p_1\, \delta a + p_2\, \delta\, da + p_3\, \delta\, d^2 a + etc. +$$
$$+ \ q_1\, \delta b + q_2\, \delta\, db + q_3\, \delta\, b^3 + etc. +$$
$$+ etc. \quad etc.,$$
$$p'\, \delta x_1 + p''\, \delta\, dx_1 + etc. +$$
$$q'\, \delta y_1 + q''\, \delta\, dy_1 + etc.$$
$$etc. \qquad etc.$$

correspondentes ao limite superior da integração e por:

$$\begin{array}{lll} P'_{x_1}, & P''_{x_1}, & P'''_{x_1}, \quad etc. \\ P'_{y_1}, & P''_{y_1}, & P'''_{y_1}, \quad etc. \\ P'_{z_1}, & P''_{z_1}, & P'''_{z_1}, \quad etc. \\ etc., & & etc. \end{array}$$

as expressões, correspondentes a esses valores, dos coeff cientes relativos a

$$x, \quad y, \quad z, \quad etc.$$

Mediante estas supposições a equação *(u)* póde escrever-s do seguinte modo :

$$(s) \qquad \left.\begin{array}{l} P'_v\,\delta v + \\ + P''_v\,\delta\,dv + etc. + \\ + P'_a\,\delta a + \\ + P''_a\,\delta\,da + etc. + \\ + P'_b\,\delta b + \\ + P''_b\,\delta\,db + etc. + \\ + P'_c\,\delta c + \\ + P''_c\,\delta\,dc + etc. \\ + etc. + etc. \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} P'_{x_1}\,\delta x_1 + \\ + P''_{x_1}\,\delta\,dx_1 + etc. + \\ + P'_{y_1}\,\delta y_1 + \\ + P''_{y_1}\,\delta\,dy_1 + etc. + \\ + P'_{z_1}\,\delta z_1 + \\ + P''_{z_1}\,\delta\,dz_1 + etc. + \\ + etc. + etc. \end{array}\right\} =$$

Si pela natureza do problema houver alguma relaç dada entre as quantidades

$$v, \; a, \; b, \; c, \; etc., \quad x_1, \; y_1, \; z_1, \; etc.$$

e suas differenciaes, elimina-se da equação *(s)*, utilisand-s essas relações, o maior numero possivel de variações iguala-se, depois, separadamente a zero os coefficientes d

variações restantes, o que dará as condições necessarias á solução completa da questão.

Os valores

$$v, \ \delta v, \ etc., \ de \ \varphi$$

devendo ser suppostos dados, é necessario considerarmos dous casos:

1.º Elles podem ser dados immediatamente, independentemente de

$$a, \ b, \ c, \ etc.;$$

nesta hypothese teremos:

$$\delta v = 0, \quad \delta\, dv = 0, \quad \delta\, d^2 v = 0, \quad etc.$$

2.º Esses valores podem ser formações dadas de

$$a, \ b, \ c, \ etc.,$$

e de suas differenciaes; neste caso teremos:

$$\delta v = L_1\, \delta a + L_2\, \delta b + L_3\, \delta c + etc.$$
$$\delta\, dv = L_1'\, \delta a + L_2'\, \delta b + L_3'\, \delta c + etc.$$
$$etc. \qquad etc.$$

valores que devem ser substituidos na equação *(s)*.

Si a formação φ cujo maximum ou minimum se procura contiver as quantidades

$$a, \ b, \ c, \ etc., \ x_1, \ y_1, \ z_1, \ etc.$$

e suas differenciaes; em tal caso estas quantidades entrando na equação differencial dada ψ, a variação $\delta\varphi$ conterá os seguintes termos em sua expressão:

$$p_1\, \delta a + p_2\, \delta\, da + p_3\, \delta\, d^2 a + etc. +$$
$$+ q_1\, \delta b + q_2\, \delta\, db + q_3\, \delta\, b^2 + etc. +$$
$$+ etc. \quad etc.,$$
$$p'\, \delta x_1 + p''\, \delta\, dx_1 + etc. +$$
$$q'\, \delta y_1 + q''\, \delta\, dy_1 + etc.$$
$$etc. \qquad etc.$$

Multiplicando estes termos pela constante arbitraria K e integrando, os termos que resultam devem ser addicionados ao primeiro membro da equação (3) do problema geral anteriormente resolvido, correspondente ao caso que estamos considerando, e, portanto, com signal contrario devem ser sommados a equação *(s)*, a qual será então da fórma :

$$\left.\begin{array}{c} P'_v\,\delta v + P''_v\,\delta\,dv + etc. + \\ + \left(P'_a - \int Kp_1\right)\delta a + \left(P''_a - \int Kp_2\right)\delta\,da + etc. + \\ + \;etc. \qquad\qquad etc. \\ - \left(P'_{x_1} + \int Kp'\right)\delta x_1 - \left(P''_{x_1} - \int Kp''\right)\delta\,dx_1 - etc. - \\ - \left(P'_{y_1} + \int Kq'\right)\delta y_1 - etc. - \\ etc. \qquad\qquad etc. \end{array}\right\} = 0$$

Sendo as integraes tomadas desde os valores

$$x = a, \qquad y = b, \quad etc.,$$

para os quaes devem ser nullas, até

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \quad etc.$$

Consideremos, finalmente, o caso em que a formação cujo maximum ou minimum se procura é a seguinte :

$$\int\int F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2} \ldots\right) dx\,dy$$

sendo a e a' os limites para x e b e b' os limites para y.

A condição para qualquer dos estados criticos, será :

$$\delta \int\int F\,dx\,dy = 0.$$

Conforme a formula (H), anteriormente obtida, temos para variação dessa integral dupla:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & u\left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + etc. - \frac{dC_2'}{dy} + etc.\right] + \\
& + \frac{du}{dx}\left[C_3 - etc.\right] + etc. + \frac{du}{dy}\left[C_2 - etc.\right] + etc. + \\
& + \int\Big[F\,\delta y + u\left(B_1 - \frac{dB_2}{dy} - \frac{dC_2}{dx} + etc.\right) + \\
& \quad + \frac{du}{dy}\left(B_2 - \frac{dB_3}{dy} - etc.\right) + \\
& \quad + \frac{d^2u}{dy^2}\left(B_3 - etc.\right) + etc.\Big]\,dx + \\
& + \int\Big[F\,\delta x + u\left(A_1 - \frac{dA_2}{dx} - etc.\right) + \\
& \quad + \frac{du}{dx}\left(A_2 - \frac{dA_3}{dx} - etc.\right) + \\
& \quad + \frac{d^2u}{dx^2}\left(A_3 - etc.\right) + etc.\Big]\,dy + \\
& + \iint u\,dx\,dy\Big[C - \frac{dA_1}{dx} + etc. - \frac{dB_1}{dy} + \\
& \quad + \frac{d^2B_2}{dy^2} - etc. + \\
& \quad + \frac{d^2C}{dx\,dy} - \frac{d^3C_3}{dy\,dx^2} + etc.\Big]
\end{aligned}
$$

Representemos por U a parte não affecta da integração. Esta expressão resultando de uma dupla integração em relação a x e a y, si designarmos por U_1 e U_2 os seus valores na integração relativa a x quando substitue-se x por a e a' ou seus valores em y, a integral definida será:

$$U_2 - U_1$$

Representando por U_2' e U_2'' a expressão de U_2 quando ahi substitue-se y por b e b', e por U_1' e U_1'' os resultados

dessa substituição em U_1, as integraes definidas desses dous termos serão respectivamente:

$$(U'_2 - U''_2), \qquad (U''_1 - U'_1)$$

d'onde resulta para valor de U entre os limites considerados de x e y :

$$\left[U \right]_{a,\ b}^{a',\ b'} = U_2'' - U_2' - U_1'' + U_1'$$

Tomando as integraes entre os mesmos limites, a condição de maximum ou minimum será expressa por :

$$U_2'' - U_2' - U_1'' + U_1' +$$

$$+ \int_a^{a'} \left[F\,\delta y + u \left(B_1 - \frac{dB_2}{dy} - etc. \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{du}{dy} \left(B_2 - etc. \right) + etc. \right]_b^{b'} dx +$$

$$+ \int_b^{b'} \left[F\,\delta x + u \left(A_1 - \frac{dA_2}{dx} - etc. \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{du}{dx} \left(A_2 - etc. \right) + etc. \right]_a^{a'} dy +$$

$$+ \int_a^{a'} \int_b^{b'} u\,dx\,dy \left[C - \frac{dA_1}{dx} + etc. - \frac{dB_1}{dy} + \right.$$

$$+ \frac{d^2B_2}{dy^2} - etc. +$$

$$\left. + \frac{d^2C}{dx\,dy} - \frac{d^3C_3}{dy\,dx^2} + etc. \right] = 0$$

Substituindo-se nesta equação u por seu valor

$$(\delta z - p\,\delta x - q_1\,\delta y)$$

e suas derivadas já obtidas, cada uma das partes de que ella se compõe ficará contendo termos affectos das variações

$$\delta z,\ \delta x,\ \delta y,\ \delta p_1,\ \delta q_1\ etc.,$$

as quaes nos termos da parte isenta do signal de integração referem-se a certos e determinados valores de x e y; na primeira integral simples sómente aos valores extremos de y, porém a todos os valores de x; na segunda integral simples aos valores extremos de x e a todos os valores de y, finalmente na integral dupla correspondem a todos os valores de x e y.

As condições de maximum serão, pois:

$$U_2'' - U_2' + U_1' - U_1'' = 0$$

$$\text{(n)} \qquad \int_a^{a'} \Big[X\Big]_b^{b'} dx + \int_b^{b'} \Big[X_1\Big]_a^{a'} dy = 0.$$

$$C - \frac{dA_1}{dx} + \frac{d^2A_2}{dx^2} - etc. + \frac{dB_1}{dy} - etc. +$$

$$+ \frac{d^2C_2}{dx\,dy} - \frac{d^2C_3}{dy\,dx^2} + etc. = 0$$

A terceira destas equações representa a equação ás derivadas parciaes, que integrada nos dá u, relação procurada entre x, y e z, para que a integral considerada seja um maximum ou um minimum.

Vejamos como deve ser interpretada a primeira destas equações ou a equação relativa aos limites. Supponhamos que pelo problema proposto trata-se de determinar a equação de uma superficie satisfazendo a certas condições e go-

sando de uma propriedade de maximum ou minimum relativa á sua superficie ou ao seu volume, a superficie sendo limitada por uma curva representada pelas equações :

(h) $$z = \varphi(x), \qquad \psi(x, y) = 0.$$

Seja F' c F d fig. (20), a projecção do contorno da superficie no plano xy, curva cuja equação é representada pela segunda equação (h).

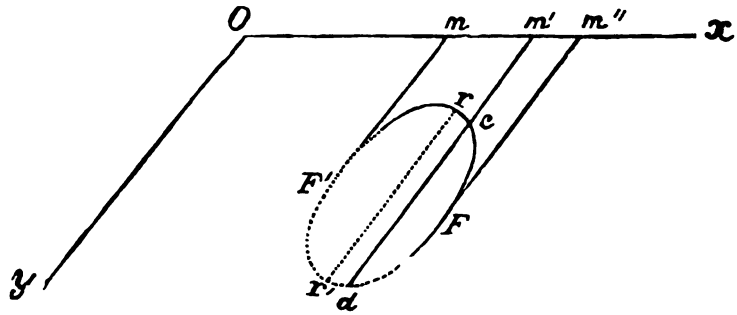


Fig. 20

Sendo a quantidade :

$$(\alpha) \quad U_2'' - U_2' + U_1' - U_1''$$

o resultado de uma dupla integração em relação a x e a y, destinada a estender as differenciaes a todo os pontos da superficie, a integral em relação a y deverá ser tomada entre os limites

$$b = m'c \qquad e \qquad b' = m'd$$

correspondentes ao mesmo valor Om' de x tirado da segunda equação (h), e a integral em relação ao valor $x = om'$ deverá ser tomada desde

$$a = Om,$$

até

$$a' = Om'',$$

valores correspondentes aos pontos da projecção, o mais proximo e o mais afastado do eixo dos y. Si a curva de projecção for uma curva fechada, continua tal como a ellipse

$$F' \, c \, F \, d \, F'$$

é claro que para

$$a = om$$

teremos

$$b = b' = m \, F'$$

e neste caso coincidindo as derivadas,

$$dp_1 \; dq_1 \text{ etc.},$$

teremos

$$+ U_1' - U_1'' = 0$$

e para

$$x'' = Om'',$$

teremos

$$y' = y'' = m'' \, F,$$

donde

$$U_2'' = U_2' = 0$$

Resulta, pois, que a expressão que representa a equação relativa aos limites é nulla por si mesma não havendo assim nenhuma equação de condição.

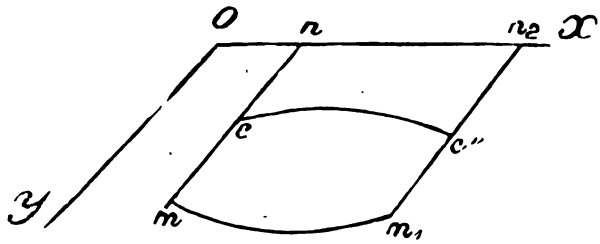


Fig. 21

Si a projecção do contorno não for uma curva fechada continua, porém, como mostra a fig. (21), um contorno constituido por duas curvas:

$$y = F(x), \; y = f(x)$$

limitadas por parallelas $m\,c$ e $m_1\,c''$ ao eixo dos y, o resultado não será o mesmo, pois, neste caso substituindo-se x por

$$a = on,\ b\ e\ b'$$

não terão o mesmo valor, sendo

$$b = nc\ e\ b' = nm,$$

substituindo-se x por

$$a' = on_1,$$

teremos tambem valores differentes para y, sendo

$$b = n_1\,c''\quad e\quad b' = n_1\,m_1$$

Por conseguinte a expressão (2) não será nulla por si mesma, de sorte que igualada a zero constituirá uma verdadeira equação de condição.

A segunda equação (1) e as equações das curvas da projecção do contorno nos dão:

$$\delta a = \varphi'(a)\,\delta a,\ \delta y'' = F'(a)\,\delta a',\ \delta y' = f'(a)\,\delta a$$

Tendo em conta estes valores e substituindo em U' a constante a por seu valor, bem como as derivadas

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy}\ etc.$$

a equação relativa aos limites conterá termos multiplicados por δa, outros por $\delta a'$, e outros por

$$\delta y,\ \delta y_1,\ etc.$$

e como os valores a e a' de x são constantes e as variações

$$\delta y,\ \delta y_1,\ etc.$$

são arbitrarias segue-se que as variações δa e $\delta a'$ serão nullas e os coefficientes de

$$\delta y,\ \delta y_1,\ etc.$$

igualados a zero nos darão um certo numero de equações relativas aos limites em relação sómente aos pontos

$$c, \quad m, \quad c'', \quad m_1.$$

Si os pontos

$$c, \quad m, \quad c'', \quad m_1$$

coincidem sem haver, porém, continuidade de c a c'', nos dous ramos da curva, as ordenadas extremas b e b' serão iguaes, porém, as derivadas parciaes tomadas nas duas curvas não coincidirão, de modo que, em geral, ainda, nesta hypothese, haverá equações relativas aos limites.

A segunda equação (n) é a equação relativa ao contorno e as integraes que a constituem teem por fim estender a todo o contorno as differenciaes que as constituem. Essas duas equações podem ser reunidas em uma só instituindo-se o arco do contorno

$$\psi(x, \quad y) = 0,$$

como variável independente. Seja ds o elemento desta curva e supponhamos os arcos crescentes no sentido

$$F'' \quad r' \quad F \quad r$$

A equação do contorno nos dá:

$$dy = -\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}}\,dx, \qquad ds = dx\,\frac{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}{\frac{d\psi}{dy}}.$$

D'onde:

$$dx = \frac{\frac{d\psi}{dy}\,ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}, \quad dy = -$$

$$-\frac{\frac{d\psi}{dx}\,ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}.$$

Substituindo estes valores na equação relativa ao contorno, e supprimindo os limites das integraes que agora devem referir-se á nova variavel independente s, resulta :

$$\int \left[X\right]_b^{b'} \frac{\frac{d\psi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} ds -$$

$$- \int \left[X_1\right]_a^{a'} \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} ds = 0.$$

A primeira destas integraes representa a somma das differenciaes tomadas desde o menor valor de x até ao maior ou desde F' até F para o ramo superior $F'\ r'\ F$ fig. (20), ao qual são relativos os valores a' e b' de x e y, e desde F até F' para o ramo inferior ao qual são relativos os valores a e b de x e y, de sorte que a variavel cresce no sentido

$$F'\ r'\ F\ r,$$

isto é, no mesmo sentido em que ds é considerado positivo.

A segunda integral representa a somma das differenciaes tomadas desde o menor valor de y, b até a maior b', isto é, desde o ponto r até o ponto r', para o ramo $r'\ F\ r$ ao qual são relativos os valores a' e b' de x e y, e desde o ponto r' até o ponto r no ramo $r'\ F'\ r$ ao qual são relativos os valores a e b de x e y, de sorte que nesta segunda integral a variavel s cresce no sentido $r\ F\ r'$ ou em sentido contrario ao da primeira integral. Por conseguinte para que os limites das duas integraes possam ser indicados da mesma maneira é necessario trocar o signal de ds na segunda integral, e deste

modo a equação relativa ao contorno póde representar-se sob a fórma:

$$\int_0^l \left(\left[X \right]_b^{b'} \frac{d\psi}{dy} + \left[X_1 \right]_a^{a'} \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} = 0$$

sendo l o comprimento total da curva

$$r' \quad F \quad r \quad F \quad r',$$

contado a partir de um ponto tomado arbitrariamente.

Substituindo u e suas derivadas por seus valores já determinados e attendendo que, achando-se os pontos correspondentes aos valores

$$(x = a, \quad y = b), \qquad (x = a', \quad y = b')$$

situados sobre a curva limite, devemos ter:

$$\delta z = \varphi'(x)\,\delta x, \qquad \delta y = - \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}}\,\delta x$$

é claro que a differencial affecta da integração só se comporá de termos multiplicados por

$$\delta x, \quad \delta p, \quad etc.,$$

e sendo as variações

$$\delta p_1, \quad \delta p_2, \quad etc.$$

arbitrarias, os seus coefficientes deverão ser igualados a zero,

e assim constituirão equações de condição as quaes subsistirão para todos os pontos do contorno e darão os valores de

$$p_1, \quad q_1 \quad etc.,$$

que devem concordar com os correspondentes fornecidos pela equação as derivadas parciaes representadas pela terceira das equação *(n)*, resultando deste modo identidades pelas quaes se poderá determinar as formações arbitrarias que a integral deve conter.

Antes de terminar devemos apreciar o importante caso de *maxima* e *minima* ordinariamente denominados *maximum* ou *minimum relativo*.

A questão consiste, como dissemos, em determinar-se qual a formação

$$y = \varphi(x)$$

que torna *maximum* ou *minimum* a integral;

$$\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

com a condição de que entre os mesmos limites seja constante uma outra integral dependente de y, isto é, com a condição de que:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_1\,dx = const.$$

Tal é o caso dos problemas dos *isoperimetros*, que foram a origem do calculo das variações, nos quaes procura-se determinar dentre as curvas do mesmo perimetro qual a que gosa da propriedade de tornar *maximum* ou *minimum* a uma integral dada.

Vejamos como referir este caso ao caso anterior já estudado.

Seja:

$$(1) \qquad \int_{x_1}^{x_2} F_1 \, dx$$

a integral que deve ser constante entre os limites x_1, x_2 e

$$(2) \qquad \int_{x_1}^{x_2} F \, dx$$

a integral cujo *maximum* ou *minimum* se procura.

Representando a primeira por z, temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_1 \, dx = z_2 - z_1$$

sendo z_2 o valor de z ou da integral para

$$x = x_2 \quad \text{e} \quad z_1$$

o seu valor para

$$x = x_1.$$

Resulta, pois, conforme a hypothese:

$$z_2 - z_1 = const,$$

A igualdade:

$$\int F_1 \, dx = z$$

nos dá, differenciando-a:

$$(3) \qquad F_1 - \frac{dz}{dx} = 0,$$

equação que póde ser considerada como uma equação de condição ligando entre si x e y.

Representando por ν um multiplicador constante, resulta:

$$(4) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \nu\, \delta\left(F_1 - \frac{dz}{dx}\right) dx = 0.$$

A condição de *maximum* ou *minimum* da integral considerada, sendo:

$$\delta \int F\, dx = 0$$

si sommarmos esta equação com a equação (4) resulta entre os limites x_1 e x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, (\delta F + \nu\, \delta F_1) - \int_{x_1}^{x_2} \nu\, \delta \frac{dz}{dx}\, dx = 0.$$

Esta expressão da condição de *maximum* ou *minimum* tem dous termos: um, o segundo, como vamos ver, é nullo mediante a hypothese da constancia de ν e da integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_1\, dx$$

de sorte que a condição para qualquer dos dous estados criticos fica referida á annullação do primeiro termo, segundo a mesma marcha anterior.

Realmente, temos que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \nu\, \delta \frac{dz}{dx}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \nu\, \delta\, dz.$$

Integrando por partes, temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \nu\, \delta\, dz = \Big[\nu\, \delta z\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\nu}{dx}\, dx\, \delta z.$$

Sendo ν constante, resulta :

$$\frac{d\nu}{dx} = 0$$

e sendo :

$$\left[\nu \, \delta z \right]_{x_1}^{x_2} = \nu \, \delta \left[z_2 - z_1 \right],$$

tendo em vista a relação $z_2 - z_1 =$ const. resulta :

$$\left[\nu \, \delta z \right]_{x_1}^{x_2} = o$$

A condição de *maximum* ou *minimum* será, pois :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(F + \nu F_1 \right) d x = o$$

Por conseguinte para referir uma questão de *maximum* ou *minimum* relativo a uma questão de *maximum* ou *minimum* absoluto, multiplica-se a integral sujeita a condição de constancia ou a integral secundaria por uma constante arbitraria, este multiplo somma-se á integral principal ou aquella cujo *maximum* ou *minimum* se procura e trata-se a somma independentemente de qualquer condição, segundo a mesma marcha empregada na determinação do *maximum* ou *minimum* absoluto.

Applicações. — Como as integraes que vamos considerar são da fórma :

$$(a) \qquad \int F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \text{ etc.,} \right) dx$$

tomemos as equações relativas a este caso geral :

$$(b) \qquad F \, \delta x + \left(\delta y - \delta x \, p \right) \left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + \frac{d\,C_4}{dx} - etc. \right]$$

$$+ \frac{d\,(\delta y - \delta x\, p)}{dx} \left[C_3 - etc. \right] + etc. = o$$

$$(c) \qquad C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - \frac{d^3C_4}{dx^3} + etc. = o$$

A primeira, como vimos, é a equação relativa aos limites e a segunda a equação differencial da linha, sendo :

$$(d) \qquad dF = Cdx + C_1\,dy + C_2\,dp + C_3\,dq + etc.$$

e

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad r = \frac{d^3y}{dx^3}, \; etc.$$

1.ª Determinar qual a linha *minimum* entre dous pontos situados em um plano.

Representando por ds o elemento da linha procurada teremos :

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2}$$

Sejam x' y' x'' y'' as coordenadas dos pontos extremos, a condição de *minimum* será :

$$\delta \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + p^2}\, dx$$

A funcção F para este caso contém, pois, sómente

$$\frac{dy}{dx}$$

ou p, donde resulta:

$$C = o, \quad C_1 = o, \quad C_3 = o, \quad C_4 = o \quad etc.$$

e

$$F = \sqrt{1 + p^2} \; e \; \frac{dF}{dp} = C_2 = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

A equação differencial (e) reduz-se assim para este caso a :

$$\frac{1}{dx}\, d\, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = o$$

ou :

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = C$$

donde :

$$p = \sqrt{\frac{C^2}{1-C^2}}$$

ou :

$$p = C'$$

sendo C e C' constantes.

Substituindo p por seu valor

$$\frac{dy}{dx}$$

resulta :

$$dy = C'\, dx$$

Integrando temos:

$$y = C'\, x + C''$$

equação de uma linha recta. Assim, pois, o caminho *minimum* procurado é uma linha recta.

Sendo os limites da linha determinados, a equação relativa aos limites é nulla por si mesma, pois sendo constantes as coordenadas dos pontos extremos as suas variações

$$\delta x',\ \delta x'',\ \delta y',\ \delta y'',$$

que multiplicam os termos da equação relativas aos limites são nullas.

Em taes condições as constantes C' e C'' são determinadas pela condição a que está sujeita a linha de passar

pelos dous pontos considerados, cujas coordenadas dev satisfazer a equação da recta, fornecendo assim as equaç seguintes, que permittem obter C' e C'':

$$(e) \qquad y' = C'x' + C'', \; y'' = C' x'' + C''$$

Si as coordenadas dos pontos limites são variaveis, i è, si estes pontos estão subordinados á condição de acharem cada um sobre uma outra linha, o caminho *mi mum* procurado será então entre duas linhas que podem traçadas em um plano.

Sejam:

$$y = \varphi(x) \text{ e } y = \psi(x)$$

as equações dessas linhas. Teremos:

$$dy = \varphi''(x)\, dx, \; dy = \psi'(x)\, dx$$

donde:

$$(h) \qquad \delta y' = \varphi'(x')\, \delta x', \; \delta y'' = \psi'(x'')\, \delta x''$$

A equação (b) relativa aos limites, para o nosso ca reduz-se a:

$$F \delta x + (\delta y - p\, \delta x) C_2 = o$$

ou

$$\delta x \sqrt{1 + p^2} + (\delta y - p \delta x) \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = o$$

donde:

$$p\, \delta y + \delta x = o$$

Considerando a integração entre os limites

$$(x', y') \quad (x'', y'')$$

esta equação será:

$$p_1 \delta y'' + \delta x'' - (p_1 \delta y' + \delta x') = o$$

Substituindo $\delta y''$ e $\delta y'$ por seus valores (h), temos:

$$\delta x'' \left[\psi'(x'') p_2 + 1 \right] - \left[p_1 \psi'(x') + 1 \right] \delta x' = o$$

donde

$$1 + \psi'(x'') p_2 = o, \quad 1 + p_1 \psi'(x') = o$$

Estas equações reunidas ás equações das linhas limites e as equações (e) darão seis equações que nos permittirão determinar

$$C', C'', x', x'', y', y''.$$

As duas ultimas equações nos dão, substituindo-se p pelo seu valor:

$$\psi'(x'') = -\frac{1}{\frac{dy''}{dx''}}, \quad \psi'(x') = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}$$

Sendo os primeiros membros destas relações respectivamente os coefficientes angulares das tangentes as curvas limites com o eixo dos x, e os denominadores dos segundos membros o coefficiente angular da recta *minimum* com o mesmo eixo, conclue-se que a recta *minimum* é normal ás curvas que constituem os limites.

Supponhamos os limites rectas perpendiculares ao eixo dos x. Neste caso

$$\delta x' = o \quad e \quad \delta x'' = o$$

e a equação dos limites será:

$$p_2 \delta y'' - p_1 \delta y' = o$$

ou:

$$\frac{dy''}{dx''} \delta y'' - \frac{dy'}{dx'} \delta y' = o$$

Porém sendo:

$$y = C'x + C''$$

a equação da recta, temos:

$$\frac{dy''}{dx''} = \frac{dy'}{dx'} = C'$$

donde:

$$C' (\delta y'' - \delta y') = o$$

e como $\delta y''$ e $\delta y'$ são arbitrarios, resulta:

$$C' = o$$

A equação da recta será, pois:

$$y = C''$$

isto é, a recta *minimum* entre as duas perpendiculares ao eixo dos x é uma parallela a este eixo.

2.ª Determinar no espaço qual a linha *minimum* entre dous pontos.

A expressão differencial da distancia entre esses pontos será

$$dx \sqrt{1 + p^2 + p_z^2}$$

sendo:

$$p = \frac{dy}{dx} \quad e \quad p_z = \frac{dz}{dx} .$$

As condições do *minimum* será neste caso:

$$\delta \int dx \sqrt{1 + p_z^2 + p^2}$$

isto é, a formação F do caso geral, neste caso, só contém as duas derivadas

$$\frac{dy}{dx} \quad e \quad \frac{dz}{dx} .$$

As equações differenciaes da linha procurada serão, como vimos, as duas seguintes: uma relativa a y e a outra analoga relativa a z:

$$(1)\quad \begin{cases} C_1 - \dfrac{dC_2}{dx} + \dfrac{d^2C_3}{dx^2} - \dfrac{d^3C_4}{dx^3} + etc. = o \\ C'_1 - \dfrac{dC'_2}{dx} + \dfrac{d^2C'_3}{dx^2} - etc. = o \end{cases}$$

Sendo:

$$dF = C\,dx + C_1\,dy + C_2\,dp + \ldots + C'_1\,dz + C'_2\,dp_z + etc.$$

A equação relativa aos limites será a seguinte, composta de duas partes: uma relativa a y e outra relativa a z:

$$+ (\delta y - p\delta x)\left[C_2 - \frac{dC_3}{dx} + etc.\right] + etc. + \left(\delta z - p_z\,\delta x\right)$$
$$+ \left[C'_2 - \frac{dC'_3}{dx} + etc.\right] + etc. = o$$

Para este caso temos:

$$F = \sqrt{1 + p^2 + p_z^2},\ C = o, C_1 = o, C_3 = o, etc. C'_1 = o, C'_3 = o, etc.$$

$$C_2 = \frac{dF}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1 + p_z^2 + p^2}},\quad C'_2 = \frac{dF}{dp_z} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}}$$

As equações (1) se reduzirão, pois, ás seguintes:

$$\frac{1}{dx}\,d\,\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} = o,\quad \frac{1}{dx}\,d\,\frac{p_z}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} = o$$

Donde:

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} = C',\quad \frac{p_z}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} = C'_1$$

Procedendo agora como no caso anterior, teremos:

$$dy = C\,dx, \quad dz = C_1\,dx$$

donde, integrando:

$$(m) \qquad y = Cx + C_2, \quad z = C_1 x + C'_2$$

Por conseguinte a linha *minimum* entre dous pontos no espaço é uma linha recta.

Para determinarmos as coordenadas dos extremos utilisemos a equação (2) relativa aos limites, que para o caso reduz-se á seguinte:

$$F\,\delta x + C_2\left(\delta y - p\delta x\right) + C'_2\left(\delta z - p_z\delta x\right) = o$$

ou:

$$\delta x\,\sqrt{1 + p^2 + p_z^2} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}}\,(\delta z - p\,\delta x) +$$

$$+ \frac{p_z}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}}\,(\delta z - p_z\delta x) = o$$

donde:

$$(n) \qquad \delta x + p\delta y + p_z\delta z = o$$

Suppondo a integração entre os limites

$$x'', y'', z'', y',$$

resulta:

$$(o) \quad \left[\delta x'' + p''\,\delta y'' + p_z''\,\delta z''\right] - \left[\delta x' + p'\,\delta y' + p_z'\,\delta z'\right] = o$$

sendo

$$p', p_z', p'', p_z''$$

os valores respectivos de p e p_z para os valores

$$x', y', z', y'.$$

Si os dous pontos extremos são determinados esta equação será nulla por si mesma, pois então as variações $\delta x''$, $\delta y''$ etc., serão nullas, si não são podem se achar situadas sobre linhas ou sobre uma superficie.

Consideremos o primeiro caso relativo ás linhas.

Sejam

$$y = \varphi(x) \qquad z = \psi(x)$$
$$y = \varphi_1(x) \quad e \quad z = \psi_1(x)$$

as equações das linhas sobre as quaes estão subordinadas a permanecer os dous extremos da linha *minimum* procurada.

Essas equações nos dão:

$$dy = \varphi'(x), \quad dz = \psi'(x)$$
$$dy = \varphi_1'(x), \quad dz = \psi_1'(x)$$

donde, resulta:

$$\delta y' = \varphi'(x')\,\delta x', \quad \delta z' = \psi'(x')\,\delta x,$$
$$\delta y'' = \varphi_1'(x'')\,\delta x'', \quad \delta z'' = \psi_1'(x'')\,\delta x''$$

Substituindo estes valores na equação (3) resulta:

$$\delta x''\left[1 + p''\varphi_1'(x'') + p_2''\psi_1'(x'')\right] - \left[1 + p'\varphi'(x') + p_2'\psi'(x')\right]\delta x' = o$$

donde:

$$1 + p''\varphi_1'(x'') + p_2''\psi'(x'') = o$$
$$1 + p'\varphi'(x') + p_2'\psi'(x') = o$$

As equações (m), porém, nos dão:

$$\frac{dy''}{dx''} = p'' = C, \quad \frac{dy'}{dx'} = p' = C$$
$$\frac{dy''}{dx''} = p_2'' = C_1, \quad \frac{dz'}{dx'} = p_2' = C_1$$

donde resulta:

$$1 + C\varphi_1'(x'') + C_1\psi_1'(x'') = o$$
$$1 + C\varphi'(x') + C_1\psi'(x') = o$$

Estas equações reunidas ás equações:

$$y' = C\,x' + C_2,\ y'' = C\,x'' + C_2,\ z' = C_1\,z' + C_2',\ z'' = C_1\,z'' + C_2'$$

e ás equações

$$y' = \varphi\,(x'),\ y'' = \varphi_1\,(x''),\ z' = \psi\,(x'),\ z'' = \psi_1\,(x'')$$

darão dez equações com as quaes poder-se-ha determinar as constantes C, C_2, C_1, C'_2, e as seis cordenadas x', y', x'', y'', dos pontos extremos.

Substituindo-se na equação:

$$\delta\,x + p\,\delta\,y + p\,z\,\delta\,z = o$$

p e p_z por seus valores resulta, considerando os limites.

$$d\,x''\,\delta\,x'' + d\,y''\,\delta\,y'' + d\,z''\,\delta\,z'' = o,\ d\,x'\,\delta\,x' + d\,y'\,\delta\,y' + \\ + d\,z'\,\delta\,z' = o$$

Estas equações nos mostram que a direcção que forma com os eixos coordenados angulos cujos cosenos sejam respectivamente proporcionaes a dx'', dy'' e dz'' a dx', dy' e dz', é perpendicular, nos pontos correspondentes a essas coordenadas, á direcção que forma com os mesmos eixos angulos respectivamente proporcionaes a $\delta\,x''$, $\delta\,y''$ e $\delta\,z''$ e a $\delta\,x'$, $\delta y'$ e $\delta\,z'$, isto é, nos mostra que a linha *minimum* em qualquer dos pontos limites é perpendicular a todas as direcções segundo as quaes possam se deslocar esses limites e, portanto, normal a curva ou superficie sobre os quaes devem manter-se os pontos extremos.

Supponhamos, finalmente, os pontos extremos respectivamente situados sobre as superficies

$$\varphi\,(x, y, z) = o\ \psi\,(x, y, z) = o$$

A primeira nos dá para o ponto a ella relativo:

$$\varphi'_{x'}, d x' + \varphi'_{y'}, d y' + \varphi'_{z'}, d z' = o$$

donde: (k)

$$\varphi'_{x'}, \delta x' + \varphi'_{y'}, \delta y' + \varphi'_{z'}, \delta z' = o$$

A equação *n* relativa aos limites nos dá:

$$\delta x' = - p' \delta' y' - p'_z \delta z'$$

Substituindo este valor na equação (*k*), resulta:

$$\delta y' (\varphi'_{y'}, - \varphi'_{x'}, p') + \delta z' (\varphi'_{z'}, - \varphi'_{x'}, p') = o$$

e, por serem $\delta y'$ e $\delta z'$ arbitrarias:

$$\varphi'_{y'}, - \varphi'_{x'}, p' = o, \quad \varphi'_{z'}, - \varphi_{x'}, p'_z, = o$$

Por uma marcha analoga determinariamos para o outro limite:

$$\psi'_{y''} - \psi'_{x''}, p'' = o \ , \ \psi'_{z''} - p''_z \psi'_{z''} = o$$

Estas quatro equações reunidas ás duas das superficies e ás quatro provenientes da substituição dos valores limites nas duas equações (m) da recta, dariam 10 equações que permittiriam determinar as quatro constantes

$$C, C_2, C_1, \text{ e } C_2,$$

e as coordenadas

$$x', y', z', x'', y'' z'' .$$

3.ª Determinar o caminho *minimum* entre dous pontos situados sobre uma superficie.

Representando por *ds* um elemento da linha procurada, temos:

$$ds = \sqrt{1 + p^2 + p^2 .} \times dx$$

Seja:

(2) $$\varphi(x, y, z) = o$$

a equação da superficie.

A condição de *minimum* será:

$$\delta \int dx \sqrt{1 + p^2 + p_z^2} = o$$

A questão, pois, é um caso simples da questão geral em que se procura o *maximum* ou o *minimum* da integral:

$$\int F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3} \ldots\right) d$$

achando-se as coordenadas ligadas pela equação (2).

Para o caso que consideramos a formação reduz-se á seguinte:

$$\int F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

As equações que exprimem a condição de *minimum* par este caso são, como vimos no estudo geral:

$$F\,\delta x + (\delta y - p\delta x)\left[C_3 - \frac{dC^3}{dx} + etc.\right] + etc. +$$

$$+\left(\delta z - p_z\,\delta x\right)\left[C_2 - etc.\right] + etc. = o$$

$$\left[C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2C_3}{dx^2} - etc.\right]\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dy}\left[C_1 - \frac{dC_2}{dx} +\right.$$

$$\left. + \frac{d^2C_3}{dx^2} - etc.\right] = o$$

os quaes no problema que consideramos reduzem-se aos seguintes:

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{dz} \times \frac{dC_2}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \times \frac{dC'_2}{dx_2} = o$$

$$(4) \qquad \delta x \sqrt{1 + p^2 + p_z^2} + (\delta y - p\delta x) \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} +$$

$$+ (\delta z - p_z \delta x) \frac{p_z}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} = o$$

por ser:

$$C = o, \; C_1 = o, \; C_1' = o, \; C_3 = o, \; C'_3 = o \; etc.$$

$$C_2 = \frac{dF}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^1 + p_2^1}}, \; C'_2 = \frac{p_z}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}}$$

A equação (4) relativa aos limites nos dá:

$$(5) \qquad \delta x + p\,\delta y + p_z\,\delta z = o$$

A equação (3) que é a equação differencial da curva nos dá:

$$\frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{1}{dx}\, d \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} -$$

$$- \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d \frac{p_z}{\sqrt{1 + p^2 + p_z^2}} = o$$

ou:

$$(6) \qquad \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{d\left(\frac{p}{ds}\right)}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\left(\frac{p_z}{ds}\right)}{dx} = o$$

Substituindo nesta equação os valores de z e p_z tirados da equação da superficie em formação de x e z e integrando a equação resultante, teriamos a equação da curva.

As constantes se determinam utilisando a equação (5) re lativa aos limites, de modo analogo ao do problema anterior e a consequencia que daquella equação resultou é ainda aqu a mesma, isto é, suppondo-se cada um dos extremos sujeit a achar-se sobre uma curva dada traçada sobre a superfici a linha *minimum* é normal ás duas linhas limites.

A equação (6) póde ser escripta sob a fórma:

$$\frac{d\varphi}{dz} \cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{d\varphi}{dy} \cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right) = o \tag{7}$$

A equação da superficie nos dá:

$$\frac{d\varphi}{dx}\, dx + \frac{d\varphi}{dx}\, dy + \frac{d\varphi}{dz}\, dz = o \tag{a}$$

Tirando o valor de $\frac{d\varphi}{dz}$ e substituindo na equação (7), t remos :

$$\frac{d\varphi}{dx}\, dx\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{d\varphi}{dy}\left[dz\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) + \right. \tag{8}$$
$$\left. + dy\, d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] = o$$

Porém a equação :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

nos dá:

$$\frac{dx}{ds}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} \cdot d\left(\frac{dz}{ds}\right) =$$

ou :

$$dx\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + dy\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + dz\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = o$$

donde, substituindo na equação (8) a somma que multipl $\frac{d\varphi}{dy}$ pelo seu valor tirado desta ultima equação, resul

$$\frac{d\varphi}{dx}\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{d\varphi}{dy}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) = o \tag{9}$$

Seguindo uma marcha analoga, porém eliminando entre (a) e (7) o valor de $\frac{d\varphi}{dy}$, obteriamos:

$$\frac{d\varphi}{dx}\left| d\left(\frac{dz}{ds}\right) - \frac{d\varphi}{dz}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) = o \right. \tag{10}$$

Qualquer das equações (9) e (10) póde substituir a equação (7).

Vejamos agora uma importante propriedade da linha *minimum*.

O plano osculador a uma curva tem para expressão:

$$(dy\, d^2z - dz\, d^2y)(x' - x) + (dz\, d^2x - dx\, d^2z) + \\ + (dx\, d^2y - dy\, d^2x) = o$$

sendo x', y' e z' as coordenadas correntes.

O plano tangente á superficie

$$\varphi(x', y', z') = o$$

no ponto x, y, z, tem para expressão:

$$\frac{d\varphi}{dx}(x' - x) + \frac{d\varphi}{dy}(y' - y) + \frac{d\varphi}{dz}\, z' - z) = o$$

Applicando a estes dous planos a fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \times \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

que nos dá o coseno do angulo de dous planos, temos representando por X o denominador:

$$\cos\alpha = \frac{(dy\, d^2x - dz\, d^2y)\frac{d\varphi}{dx} + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)\frac{d\varphi}{dy} +}{X}$$

$$\frac{+ (dx\, d^2y - dy\, d^2x)\frac{dx}{dz}}{X}$$

Suppondo ds constante, o que podemos fazer, e dividindo ambos os termos da fracção por d^2s, resulta:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dy}{ds}\left(\frac{d\varphi}{dx}\, d\,\frac{dz}{ds} - \frac{d\varphi}{dz}\, d\,\frac{dx}{ds}\right) +}{X_1}$$

$$\frac{+\frac{dx}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\,.\, d\,\frac{dy}{ds} - \frac{d\varphi}{dy}\, d\,\frac{dz}{ds}\right) +}{X_1}$$

$$\frac{+\left(\frac{d\varphi}{dy}\, d\,\frac{dx}{ds} - \frac{d\varphi}{dx}\, d\,\frac{dy}{ds}\right)\frac{dz}{ds}}{X_1}$$

Ora, em virtude das equações (7), (9) e (10) sendo nullo o numerador desta expressão resulta:

$$\cos\alpha = o,$$

isto é, o plano osculador da linha *minimum* é perpendicular no plano tangente á superficie.

Supponhamos a superficie considerada como sendo a de uma esphera, isto é:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o$$

Esta equação nos da:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x\,,\quad \frac{d\varphi}{dy} = 2y$$

Substituindo estes valores na equação (7):

$$x\,\frac{dy}{ds} - y\,\frac{dx}{ds} = o$$

ou, e vice-versa, [illegible] existente:

$$y\,\frac{dx}{ds} - x\,\frac{dy}{ds} = o$$

donde

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = o$$

Integrando, resulta:

$$z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds} = C \tag{11}$$

Seguindo marcha perfeitamente analoga para com as equações (9) e (10), obteriamos:

$$x\frac{dz}{ds} - z\frac{dx}{ds} = C_1. \tag{12}$$

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = C_2 \tag{13}$$

Multiplicando a 1ª por x, a 2ª por y e a 3ª por z e sommando os resultados membro a membro, temos:

$$C\,x + C_1\,y + C_2\,z = o$$

Esta equação com a da esphera determinam a linha procurada, e como ella representa a equação de um plano passando pela origem das coordenadas, onde se acha o centro da esphera, conclue-se que a linha resultante de sua intersecção é um arco de um grande circulo da esphera.

Como o plano deve passar pelos pontos extremos, cujas coordenadas são

$$(x_1'\ y_0'\ z'),\ (x'',\ y'',\ z''),$$

as equações:

$$z' + \frac{C}{C_2}x' + \frac{C_1}{C_2}y' = o,\ z'' + \frac{C}{C_2}x'' + \frac{C_1}{C_2}y'' = o$$

servirão para determinar as constantes:

$$\frac{C}{C_2}\ e\ \frac{C_1}{C_2}.$$

Supponhamos a superficie considerada um cylindro recto tendo para eixo o eixo dos y, isto é, supponhamos :

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + z^2 - r^2,$$

Para este caso temos :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 2z, \quad \frac{d\varphi}{dy} = o$$

Substituindo estes valores nas equações (7) e (9), temos:

$$2z\, d\,\frac{dy}{ds} = o, \quad 2x\, d\,\frac{dy}{ds} = o$$

donde:

$$\frac{dy}{ds} = C$$

Esta equação integrada e reunida á da superficie :

$$z^2 + x^2 = r^2$$

constitue o systema que determina a linha procurada. Sendo

$$\frac{dy}{ds}$$

o coseno do angulo formado por um elemento da linha procurada com a ordenada y e tendo esse coseno um valor constante, conclue-se que essa linha é tal que qualquer de seus elementos ou a tangente em qualquer de seus pontos, forma com o eixo dos y, isto é, com as geratrizes da superficie que lhe são parallelas um angulo constante. A linha procurada é, pois, uma helice.

4.ª Determinar das curvas isoperimetros entre dous pontos fixos

$$(x'\ y'),\ (x'',\ y'')$$

qual a que limita a área *maximum*.

Representando por F uma formação de y, a questão algebricamente consiste em determinar-se o *maximum* da integral:

$$\int_{x'}^{x''} F\,dx$$

sob a condição de ser:

$$\int_{x'}^{x''} dx\sqrt{1+p^2} = l$$

sendo l uma constante.

A condição de *maximum* será, como vimos no estudo anterior:

$$\delta\int_{x'}^{x''} dx\left(F + k\sqrt{1+p^2}\right) = o$$

sendo k um factor constante arbitrario.

A equação differencial da curva para este caso, considerado geralmente na integral

$$\int (F + kF_1)\,dx$$

é a seguinte:

$$C_1 - \frac{dC_2}{dx} + \text{etc.} + kC_1' - k\frac{dC'_2}{dx} + \text{etc.} = o \tag{2}$$

sendo:

$$dF = Cdx + C_1\,dy + C_2\,dp + \ldots \text{etc.}$$

$$dF_1 = C'dx + C_1'dy + C_2'dp + \ldots$$

Para o exemplo considerado a equação (2) reduz-se á seguinte:

$$C_1 - \frac{kdC_2'}{dx} = o$$

[illegible] C_1 pelo seu valor $\frac{dF}{dy}$, e C_2' pelo seu valor:

$$C_2' = \frac{dF_1}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

[illegible]

$$\frac{dF}{dy} - k\frac{1}{dx} d \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = o$$

[illegible] o segundo termo:

$$\frac{dF}{dy} - k\frac{1}{dx}\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = o$$

[illegible]

$$dF - k\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = o$$

[illegible]:

$$dF + Kd\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = o$$

Integrando, resulta:

$$F + \frac{K}{\sqrt{1+p^2}} = C$$

Donde,

$$\frac{K}{C-F} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ou:

$$\frac{Kdx}{C-F} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

Donde:

$$dx = \frac{(C-F)\,dy}{\sqrt{K^2-(C-F)^2}}$$

Integrando temos:

$$x = \int \frac{(C-F)\,dy}{\sqrt{K^2-(C-F)}} + C_1$$

Sendo dada a formação F esta equação integrada dará a equação da linha procurada. As constantes C, C_1 e K determinam-se por um systema de tres equações de condição

exprimindo que a linha passa pelos dous pontos dados e entre elles tem um comprimento constante.

Como os dous pontos são fixos não ha equação relativa aos limites por serem as variações de suas coordenadas nullas.

Para exemplificarmos a questão supponhamos que

$$F = y.$$

A integral

$$\int F\,dx$$

representará nesta hypothese a área de uma curva plana e o problema consistirá em determinar-se entre todas as curvas planas isoperimetros passando por dous pontos, qual a que abrange uma área *maximum*.

Sendo

$$F = y,$$

temos:

$$\frac{d\,F}{dy} = 1$$

A equação differencial da curva será neste caso:

$$1 - \frac{K}{dx}\,d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = o$$

Donde:

$$dx = k\,d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$

Integrando resulta:

$$x = \frac{k\,p}{\sqrt{1+p^2}} + C$$

Donde:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = p = \frac{x - C}{\sqrt{K^2 - (x - C)^2}}$$

Fazendo:

$$K^2 - (x - C)^2 = z$$

temos:

$$dz = -2(x - C)\,dx$$

Donde:

$$dx = -\frac{dz}{2(x - C)}$$

Substituindo estes valores na equação (1), temos:

$$dy = -\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\left(z\right)^{-\frac{1}{2}} dz$$

Integrando, resulta:

$$y = -z^{\frac{1}{2}} + C_1$$

Substituindo z pela sua expressão, temos:

$$y = C_1 - \sqrt{K^2 - (x - C)^2}$$

Donde:

$$(y - C_1)^2 + (x - C)^2 = k^2$$

A linha procurada é, pois, um circulo. As constantes C e C_1 determinam-se pelas equações que traduzem a condição de passagem da linha pelos pontos dados, e o raio k pela equação que traduz a constancia do comprimento entre esses dois pontos. Para isto substitue-se na equação

$$\int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + p^2}\,dx = l$$

o valor:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x - C}{\sqrt{k^2 - (x - C)^2}}$$

o que nos dá :

$$\int_{x'}^{x''} \frac{k\,dx}{\sqrt{k^2 - (x - C)^2}} = l.$$

Donde :

$$k\left[arc.\ sen\ \frac{x'' - C}{k} - arc.\ sen\ \frac{x^1 - C}{k}\right] = l.$$

5.º Determinar entre as curvas planas isoperimetros, passando por dois pontos fixos

$$(x', y'),\quad (x'', y'')$$

qual a que por sua revolução em torno do eixo dos x gera uma superficie de área minima.

A área de uma superficie de revolução e o comprimento de uma curva sendo expressas respectivamente pelas integraes:

$$2\pi \int y\sqrt{1 + p^2}\,dx,\ \int \sqrt{1 + p^2}\,dx$$

a questão consiste em se determinar o *minimum* da integral:

$$2\pi \int_{x'}^{x''} y\sqrt{1 + p^2}\,dx,$$

sob a condição:

$$\int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + p^2}\,dx = l$$

sendo l uma constante.

A equação differencial correspondente ao caso geral.

$$\int dx\,[\,F + k\,F_1\,]$$

reduz-se á seguinte:

$$(1) \qquad C_1 - \frac{dC_2}{dx} - K\,\frac{dC_2'}{dx} = 0.$$

Sendo:

$$F = y\sqrt{1+p^2} \quad \text{e} \quad F_1 = \sqrt{1+p^2}$$

resulta:

$$\frac{dF}{dy} = C_1 = \sqrt{1+p^2}\,,\quad \frac{dF}{dp} = C_2 = \frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}\,,$$

$$C_2' = \frac{dF_1}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Substituindo estes valores em (1), teremos para equação da curva procurada :

$$\sqrt{1+p^2} - \frac{d\left[(y+k)\,\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]}{dx} = 0.$$

Dividindo tudo por

$$\sqrt{1+p^2}\,,$$

substituindo p por

$$\frac{dy}{dx}$$

e notando que:

$$ds = dx\,\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

resulta:

$$1 - \frac{d\left[(y+k)\,\dfrac{dy}{ds}\right]}{ds} = 0.$$

Considerando s variavel independente e, portanto, ds constante, e differenciando esta expressão, temos :

$$(2) \qquad 1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - (y + k)\frac{d^2y}{ds^2} = 0.$$

Porém, a expressão:

$$(3) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

nos dá

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Substituindo este valor em (2), resulta:

$$(4) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - (y + k)\frac{d^2y}{ds^2} = 0.$$

Differenciando a equação (3), temos :

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0.$$

donde :

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}.$$

Substituindo este valor em (4) temos, dividindo depois por $\frac{dx}{ds}$:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + (y + k)\frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

ou :

$$\frac{d\left[(y + k)\frac{dx}{ds}\right]}{ds} = 0.$$

Integrando, resulta :

$$(y + k) \frac{dx}{ds} = C.$$

Elevando ao quadrado e substituindo ds^2 por seu valor, teremos :

$$dx = \frac{C\,dy}{\sqrt{(y + k)^2 - C^2}}.$$

Integrando, resulta:

$$x = C\,l.\left[\frac{y + k + \sqrt{(y + k)^2 - C^2}}{C}\right] + C_1.$$

sendo C_1 uma nova constante arbitraria. Esta expressão nos dá:

$$\frac{x - C_1}{C} = l\left[\frac{y + k + \sqrt{(y + k)^2 - C^2}}{C}\right].$$

donde:

$$(5) \qquad y + k + \sqrt{(y + k)^2 - C^2} = C\,e^{\frac{x - C_1}{C}}.$$

Porém :

$$\left[y + k + \sqrt{(y + k)^2 - C^2}\right]\left[y + k - \sqrt{(y + k)^2 - C^2}\right] = C^2.$$

donde :

$$y + k - \sqrt{(y + k)^2 - C^2} = \frac{C^2}{C\,e^{\frac{x - C_1}{C}}} = C\,e^{-\frac{x - C_1}{C}}.$$

Sommando esta igualdade com (5), resulta :

$$2\,(y + k) = C\left[e^{\frac{x - C_1}{C}} + e^{-\frac{x - C_1}{C}}\right].$$

Esta equação nos mostra que a curva procurada é a *catenaria*.

Sendo os extremos fixos e determinados não ha equação relativa aos limites, e as constantes serão determinadas pelas equações que resultam da condição de passagem da linha pelos dois pontos. Suppondo, por exemplo, que as ordenadas das extremidades sejam iguaes e tomando para eixo dos y a perpendicular ao eixo de revolução, tirada ao meio da distancia entre os dois pontos, teremos:

$$x' = x'',$$

donde resulta que a constante C_1 é nulla, e nesta hypothese a equação da curva será :

$$2(y + k) = C\left[e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}}\right].$$

A constante C será dada pela equação :

$$2(y' + k) = C\left[e^{\frac{x'}{C}} + e^{-\frac{x'}{C}}\right]$$

e a constante k, determinada de modo analogo ao do problema anterior.

6.º Determinar dentre as curvas isoperimetros passando por dois pontos dados, qual a que pela sua revolução em torno do eixo dos x gera o solido de volume minimum.

Sendo o volume de revolução e o arco da curva geratriz representados respectivamente pelas integraes :

$$\pi \int y^2\, dx\ ,\ \int \sqrt{1 + p^2}\, dx.$$

a questão consiste em determinar-se o maximum da integral.

$$\pi \int_{x'}^{x''} y^2\, dx$$

sob a condição:

$$\int_{x'}^{x''} dx \sqrt{1+p^2} = l$$

sendo l uma constante.

A condição de *minimum* será, pois:

$$\delta \int \left[y^2 + K\sqrt{1+p^2} \right] dx = o$$

Os valores das fórmulas geraes serão para este exemplo.

$$F = y^2 \,,\; F_1 = \sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dF}{dy} = C_1 = 2y \,,\; \frac{dF_1}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

sendo todos os outros termos nulos.

A equação differencial da curva relativa ao caso geral fica assim reduzida para este á seguinte:

$$2y - K \frac{d \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} = o$$

d'onde:

$$2y = K \frac{d \dfrac{dy}{dx\sqrt{1+p^2}}}{dx} = K \frac{d \dfrac{dy}{ds}}{dx}$$

Considerando s como variavel independente, temos:

(1) $$2y = K \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dx} \,.$$

Porém a equação:

$$\overline{ds}^2 = dx^2 + dy^2$$

nos dá:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = o\,;$$

donde:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}$$

Substituindo este valor em (1), resulta:

$$2y\,\frac{dy}{ds} = -\frac{d^2x}{ds^2}\,K$$

Integrando, temos:

$$y^2 = -K\,\frac{dx}{ds} + c = -K \times \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + c$$

Substituindo p pelo seu valor e elevando ao quadrado, resulta:

$$\left(y^2 - c\right)^2 dx^2 + \left(y^2 - c\right)^2 dy^2 = K^2\,dx^2$$

donde:

$$dx = \frac{(y^2 - c)\,dy}{\sqrt{K^2 - (y^2 - c)^2}}$$

Esta equação integrada por meio das formações ellipticas nos dará a equação finita da curva procurada, sendo as constantes obtidas como nos problemas anteriores.

7.º Determinar qual a superficie que sujeita a ser limitada por um contorno dado tem uma área *minimum*.

Este problema é um caso simples do caso geral em que se procura determinar o *minimum* da integral:

$$\iint F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\ldots \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2} \ldots\ldots\right) dx\, dy$$

Sendo a área representada por

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy$$

a formação F aqui só contém as derivadas parciaes de primeira ordem

$$\frac{dz}{dx} \text{ e } \frac{dz}{dy}$$

as quaes representaremos por p_1 e q_1.

A condição de *minimum* será, pois:

$$\delta \iint \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}\, dx\, dy = o$$

Como o contorno é dado não ha equação relativa aos limites e a equação differencial da superficie é, como vimos, para o caso geral:

$$(1) \qquad C - \frac{dA_1}{dx} + \frac{d^2A_2}{dx^2} - etc - \frac{dB_1}{dy} + \frac{d^2B_2}{dy^2} - etc = o$$

sendo:

$$dF = A\,dx + B\,dy + C\,dz + A_1 dp_1 + B_1\, dq_1 + cte.$$

Para o problema que estamos considerando, temos:

$$F = \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}$$

$$\frac{dF}{dp_1} = A_1 = \frac{p_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}}, \quad \frac{dF}{dq_1} = \frac{q_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}}$$

e todos os outros coefficientes nullos:

Estes valores substituidos na equação (1) nos dão para equação differencial da superficie:

$$\frac{1}{dx}\, d\, \frac{p_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}} + \frac{1}{dy}\, d\, \frac{q_1}{\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}} = o$$

ou

$$\frac{1}{dx}\, d\, \frac{p_1}{F} + \frac{1}{dy}\, d\, \frac{q_1}{F} = o$$

Differenciando, resulta:

$$\frac{F p_1' - p_1 F_x'}{F^2} + \frac{F q_1' - q_1 F_y'}{F^2} = o$$

sendo p_1' e q_1' as derivadas respectivas de p_1 e q_1 em relação a x e a y e F_x' e F_y' as derivadas de F em relação a x e a y.

Esta ultima expressão nos dá :

$$F\left[p_1' + q_1'\right] + \left[F_x' p_1 + F_y' p_1\right] = o$$

Multiplicando por F, resulta:

$$(2) \qquad F^2\left[p_1' + q_1'\right] - \left[F_x' F p_1 + F_y' F q_1\right] = o$$

sendo :

$$F^2 = 1 + p_1^2 + q_1^2 ,$$

Differenciando em relação a x temos:

$$F F_x' = p_1 p_1' + q_1 (q_1')_x$$

representando

$$(q'_1)_x$$

a derivada de q_1 em relação a x.

Differenciando em relação a y, temos:

$$F F_y = p_1 (p_1')_y + q_1 q_1'$$

representando

$$(p_1')_y$$

a derivada de p_1, em relação a y ou

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy}.$$

Substituindo estes valores em (2), resulta :

$$\left(1 + p_1^2 + q_1^2\right)\left(p_1' + q_1'\right) -$$

$$- \left[p_1\left(p_1 p_1' + q_1\left(q_1'\right)_x\right) + q_1\left(p_1 (p_1')_y + q_1 q_1'\right)\right] = 0$$

Donde :

$$\frac{d^2 z}{dx^2}\left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) + \frac{d^2 z}{dy^2}\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) -$$

$$- 2\,\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2 z}{dx\, dy} = 0$$

Esta equação ás derivadas parciaes de segunda ordem é a mesma que se obtem formulando a hypothese da igualdade e signaes contrarios dos dous raios principaes de curvatura em um mesmo ponto de uma superficie curva, de modo que ella representa a equação da superficie cujos raios de curvatura são iguaes e de signaes contrarios.

Como não ha equação relativa aos limites as formações arbitrarias da integração determinam-se pela condição de que a superficie considerada deve conter a curva dada que representa o contorno.

8.º Determinar dentre os solidos de igual volume e mesmo contorno, qual aquelle cuja superficie é um *minimum*.

A questão consiste em determinar-se o *minimum* da integral:

$$\iint \sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\, dx\, dy$$

Sob a condição de que:

$$\iint z\, dx\, dy = l$$

sendo l uma constante, isto é, trata-se de uma questão de *minimum* relativo, a qual como no caso das integraes simples reduz-se a determinar-se o *minimum* absoluto da integral:

$$\iint \left(\sqrt{1+p_1^2+q_1^2} + Kz\right) dx\, dy$$

sendo K uma constante.

A condição de *minimum* será, pois:

$$\delta \iint \left(\sqrt{1+p_1^2+q_1^2} + Kz\right) dx\, dy = o$$

O caso geral:

$$\delta \iint \left(F + KF_1\right) dy\, dx = o$$

nos dá para a equação procurada:

$$(1)\quad C - \frac{dA_1}{dx} + etc. - \frac{dB_1}{dy} + etc. + KC' - \frac{Kd\,A'_1}{dx} + \\ + etc. - \frac{Kd\,B'_1}{dy} + etc. = o$$

Sendo :

$$dF = Adx + Bdy + Cdz + A_1 dp_1 + B_1 dq_1 + etc.$$

$$dF_1 = A'dx + B'dy + C'dz + A'_1 dp_1 + B'_1 dq_1 + etc.$$

Temos, pois, para o problema que consideramos :

$$F = \sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}, \quad F_1 = z$$

$$\frac{dF}{dp_1} = A_1 = \frac{p_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}}, \quad \frac{dF}{dq_1} = B_1 =$$

$$= \frac{q_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}}, \quad \frac{dF_1}{dz} = 1 = C'$$

sendo todos os demais coefficientes iguaes a zero.

A equação (1) será para o nosso caso :

$$K - \frac{1}{dx} d \frac{p_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} - \frac{1}{dy} d \frac{q_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}} = o$$

ou :

$$K - \frac{1}{dx} d \frac{p_1}{F} - \frac{1}{dy} d \frac{q_1}{F} = o$$

Differenciando temos :

$$K - \frac{Fp'_1 - p_1 F'_x}{F^2} - \frac{Fq'_1 - q_1 F'_y}{F^2} = o.$$

sendo p'_1 e q'_1 as derivadas respectivas de p_1 e q_1 em relação a x e a y e F'_x, F'_y as derivadas de F em relação a x e a y.

Esta ultima expressão nos dá:

$$F(p'_1 + q'_1) - F\left(F'_x + F'_y\right) + \left[F'_x p_1 + F'_y q_1\right] = o$$

Porém sendo :

$$F^2 = 1 + p_1^2 + q_1^2$$

temos, differenciando em relação a x e depois a y :

$$FF'_x = p_1 p'_1 + q_1 (q'_1)_x . \quad FF'_y = p_1 (p_1')_y + q_1 q'_1$$

representando

$$(q'_1)_x \quad e \quad (p'_1)_y$$

as derivadas respectivas de q_1 e p_1 em relação a x e em relação a y ou as derivadas :

$$\frac{d^2 z}{dy\,dx} \quad e \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} .$$

Substituindo estes valores na equação (2) resulta, tendo-se antes multiplicado aquella equação por F :

$$K \left(1 + p_1^2 + q_1^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + p_1^2 + q_1^2\right)\left(p'_1 + q'_1\right) +$$

$$+ \left[p_1 \left(p_1 p_1' + q_1 (q_1')_x\right) + q_1 \left(p_1 (p_1')_y + q_1 q'_1\right) \right] = o$$

ou:

$$K\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2 z}{dx^2}\left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{d^2 z}{dy^2}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] - 2\,\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}\,\frac{d^2 z}{dx\,dy} = o$$

Tal é a equação as derivadas parciaes da superficie do solido.

Tomemos agora a equação da esphera:

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \nu)^2$$

Esta equação nos dá:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x-\alpha}{z-\nu}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y-\beta}{z-\nu}$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{(z-\nu)^3}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{(z-\nu)^2+(x-\alpha)^2}{(z-\nu)^3},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{(y-\beta)^2+(z-\nu)^2}{(z-\nu)^3}$$

Substituindo estes valores na equação as derivadas da superficie, resulta:

$$K\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\nu)^2\right]^{\frac{3}{2}} = -2\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\nu)^2\right]$$

ou

$$K^2\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\nu)^2\right] = 4$$

Donde:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\nu)^2 = \left(\frac{2}{K}\right)^2$$

Este resultado nos mostra que a equação da esphera é uma integral da equação considerada desde que se tome o raio dessa esphera igual a

$$\frac{2}{K}.$$

Assim, pois, a esphera gosa da propriedade de *minimum* de superficie entre os solidos de igual volume.

As constantes determinam-se pelas condições de passar a esphera pela curva do contorno. A solução será simples si o contorno dado puder se achar sobre uma esphera, no caso contrario é necessario recorrer a integral a mais geral e determinar as formações arbitrarias de modo a tornar possivel essa coincidencia.

COORDENAÇÃO ESPECIAL

COMPOSIÇÃO DAS FORÇAS

As forças podem ser sempre representadas por meio de rectas de grandeza proporcional ás suas intensidades, sendo o sentido julgado a partir dos seus pontos de applicação para o extremo opposto das respectivas rectas que as representam.

O ponto de applicação de uma força F póde ser indifferentemente transferido para qualquer outro de sua direcção, uma vez suppostos os dous invariavelmente ligados.

Para tornar isto evidente basta concebermos applicadas no novo ponto duas forças $+F_1$ e $-F_2$ iguaes a F e da mesma direcção, sendo a força $+F_1$ no mesmo sentido e a força $-F_2$ em sentido contrario: a acção da força $-F_2$ será neutralisada pela acção igual e contraria da força F e apenas restará a força $+F_1$ igual, na mesma direcção e sentido que a primitiva e actuando no novo ponto de applicação.

Este modo de representar as forças permitte-nos sujeital-as a uma composição e decomposição analogas ás das velocidades, tendo por base o principio do parallelogrammo, cujas consequencias lhes serão inteiramente applicaveis, apenas substituindo-se a denominação de *velocidade* pela denominação de *força*.

Geometricamente, pois, duas forças actuando sobre um ponto em direcções differentes, teem para resultante a diagonal do parallelogrammo construido sobre as rectas que

as representam; si a direcção for a mesma, a resultante será igual á somma ou á differença das duas componentes, conforme estas forem no mesmo sentido ou em sentidos contrarios.

Dado um numero qualquer n de forças, situadas ou não no mesmo plano, pela applicação repetida e successiva do principio do parallelogrammo podemos determinar a resultante de todas ellas.

Para obter isto combinam-se duas dessas forças pela regra fundamental, a resultante dessas duas combina-se, segundo a mesma regra, com a terceira força, o que dará uma outra equivalente ás tres primeiras; esta segunda resultante combina-se com a quarta força, o que dará uma força equivalente ás quatro primeiras e assim por diante até a ultima força que, combinada com a resultante, deste modo obtida, das $(n-1)$ outras forças dará a resultante final de todas ellas.

Applicada esta marcha á composição de forças F, F_1, F_2 etc., existentes no mesmo plano, a simples inspecção da construcção geometrica que resulta deixa ver que ella reduz-se a tirar-se pelo extremo de uma qualquer das forças F, por exemplo, uma recta ab igual e parallela á força F_1 e no mesmo sentido; pelo extremo de ab uma outra recta $a'b'$ igual e parallela a F_2 e no mesmo sentido; pelo extremo de $a'b'$ uma outra recta nas mesmas condições relativamente á força F_3 e assim successivamente até a ultima: a resultante será a recta que une a extremidade da parallela á ultima força ao ponto commum de applicação, de modo que si a parallela á ultima força do systema fechar o contorno polygonal assim obtido, a resultante total será nulla.

No caso de tres forças F, F_1 e F_2 actuando sobre o mesmo ponto m, em planos differentes, compõe-se primeiramente, segundo a regra fundamental as forças F e F_1 no plano $F\,m\,F_1$ e a resultante R compõe-se com F_2 segundo a mesma regra no plano $R\,m\,F_2$; esta segunda resultante será a resul-

tante total e virá representada, como mostra a construcção, em grandeza e direcção pela diagonal do parallelipipedo construido sobre as rectas que representam as tres forças consideradas.

Isto estabelecido, vejamos como é possivel determinar-se geometricamente a resultante de forças existentes no mesmo plano, independentemente do conhecimento do seu ponto de concurso.

Sejam F e F_1 duas forças existentes no mesmo plano. Si por um ponto qualquer do plano tirarmos uma recta igual e parallela á força F e no mesmo sentido e pelo extremo desta recta tiramos uma outra nas mesmas condições relativamente á força F, a recta que une os extremos destas duas linhas representará em grandeza e direcção a resultante das duas forças.

Disto conclue-se que todas as vezes que tivermos um systema de tres forças actuando sobre um ponto e respectivamente iguaes e parallelas aos tres lados de um triangulo abc (fig. 22) considerados no mesmo sentido: de a para b, de b para c e de c para d, essas tres forças teem uma resultante nulla, pois neste caso a terceira força ca actuando no sentido de c para a será destruida pela resultante ac das duas outras actuando na mesma direcção e em sentido contrario de a para c.

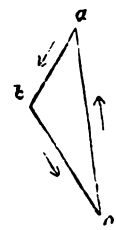


Fig. 22

Para determinarmos a situação da resultante consideremos as duas forças F_1 e F_2 applicadas aos pontos m_1 e m_2 que supporemos invariavelmente ligados (fig. 23).

Tomando um ponto qualquer a de plano para ponto de partida e construindo o triangulo abc, ac será, segundo o que estabelecemos, igual e parallela á resultante R procurada.

Conhecida por este modo R em grandeza e direcção para determinarmos a sua situação, basta-nos determinar um dos seus pontos.

Para isto toma-se um ponto qualquer e do plano e une-se esse ponto aos vertices abc do triangulo considerado.

Por um ponto qualquer A de plano tire-se AB parallela á (até encontrar a direcção da força F_2 ; pelo ponto de encont tire-se BD parallela á cb até encontrar a direcção da for F_1 e, finalmente, pelo ponto de encontro destas tire-se l parallela á ce.

Suppondo applicadas no ponto B segundo a direcção duas forças contrarias iguaes á ca, nos extremos da recta l supposta invariavel, e segundo a sua direcção duas for

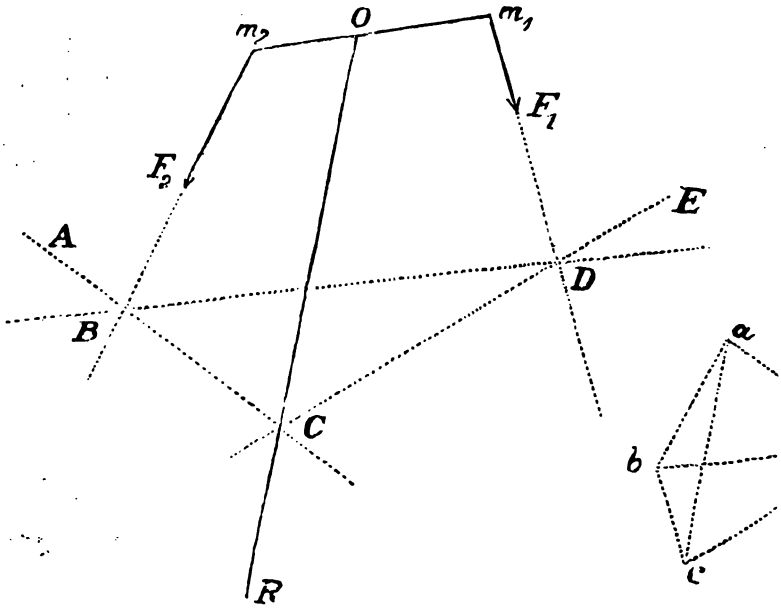


Fig. 23

contrarias iguaes á cb, e no ponto D segundo a direc ED duas forças contrarias iguaes a ec, e concebend ponto de applicação das forças consideradas transporta para B e D, fica o systema primitivo de duas forças F_1 e substituido por um outro equivalente de oito forças — qua actuando sobre o ponto B e quatro sobre o ponto D.

Das quatro forças que actuam sobre o primeiro po tres são respectivamente iguaes e parallelas aos lados

ab e *bc* do triangulo *eab*, no sentido de *e* para *a*, de *a* para *b* e de *b* para *e* e teem, portanto, uma resultante nulla e a quarta que resta é igual e parallela á *ea* e actua segundo *AB* no sentido de *A* para *B*; das quatro que actuam sobre o segundo ponto, tres são respectivamente iguaes e parallelas aos lados *eb*, *bc* e *ce* do triangulo *ebc*, actuando no sentido de *e* para *b*, de *b* para *c* e de *c* para *e* e, portanto, teem uma resultante nulla, e a quarta é igual e parallela á *ec*, e actua segundo *ED* no sentido de *E* para *D*.

O systema primitivo de duas forças acha-se finalmente substituido por um outro equivalente de duas forças respectivamente iguaes á *ea* e *ec* actuando segundo as direcções *AB* e *ED*, e para termos um ponto da direcção da sua resultante basta prolongar estas duas forças até encontrarem-se.

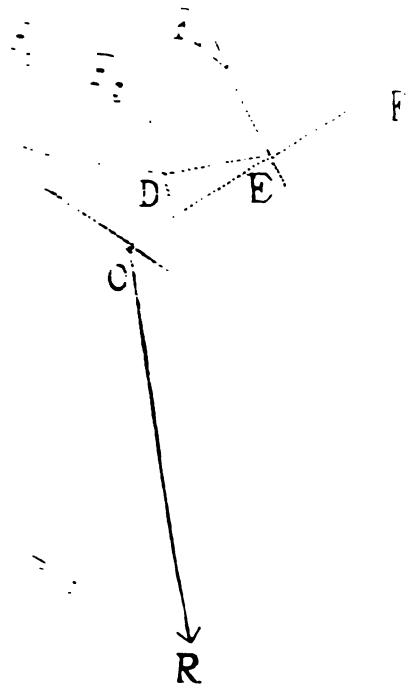
Tirando pelo ponto de encontro *C* uma parallela *oC* a *ac*, tomando sobre ella uma grandeza igual á *ac* teremos a resultante das duas forças consideradas em grandeza, direcção e situação ficando, entretanto, indeterminado o ponto de applicação que, como vimos, póde ser considerado um qualquer da direcção determinada.

Os raciocinios que acabamos de fazer para duas forças applicam-se a um numero qualquer de forças com a unica differença que em vez de um triangulo teriamos um polygono.

Sejam, por exemplo, quatro forças: F_1 F_2 F_3 F_4 (fig. 24). Tomando um ponto qualquer *a* para ponto de partida determinaremos *ae* que representa a resultante em grandeza e direcção.

Unindo um ponto qualquer *f* aos vertices do polygono construido, tire-se por um ponto qualquer *A* uma recta *AB* parallela á *fa* até encontrar a direcção da força F_1, pelo ponto de encontro tire-se *BC* parallela á *fb* até encontrar a direcção de F_2, pelo ponto de encontro tire-se *CD* parallela á *fc* até encontrar a direcção de F_3, pelo ponto de encontro tire-se *DE* parallela á *fd* até encontrar a direcção de F_4, e, finalmente, pelo ponto de encontro tire-se *EF* parallela á *fe*.

[illegible] e FE, o ponto
[illegible] da resultante:
[illegible] ac e sobre ella
[illegible] a resultante em



[illegible] apenas indeterminado

[illegible] dos os outros é iden-
[illegible] A substituição do systema

primitivo pelo systema final de duas forças respectivamente iguaes á *fa* e *fe* e actuando segundo *AB* e *FE* obtem-se suppondo applicadas em *B* duas forças contrarias, iguaes á *fa*, nos extremos da recta *BC* duas forças contrarias iguaes á *fb*, nos extremos da recta *CD* duas forças contrarias iguaes á *fc*, nos extremos de *DE*, duas forças contrarias iguaes á *fd*, no ponto *E* duas forças contrarias iguaes a *fe*; e, finalmente, concebendo os pontos de applicação das forças dadas, transportados respectivamente para os pontos: *B*, *C*, *D*, *E*.

Ficam assim applicadas em cada um dos vertices intermediarios tres forças respectivamente iguaes e parallelas aos lados do triangulo correspondente no polygono *fabcdef*, e portanto tendo uma resultante nulla; e em cada um dos vertices *B* e *E* quatro forças, tres das quaes acham-se nas mesmas condições que as anteriores, restando assim no systema final, equivalente ao primitivo, apenas duas forças, uma em *A* igual à *fa* e actuando segundo *AB* e outra em *E* igual á *fe* e actuando segundo *FE*, forças cuja resultante, que é a resultante do systema dado, passa pelo ponto de concurso.

Desde que duas forças actuando sobre um ponto são equivalentes á uma outra representada em grandeza e direcção pela diagonal do parallelogrammo construido sobre as duas é evidente que essas duas forças só podem ter uma unica resultante, e que á toda força corresponde um numero infinito de systemas de forças que lhe são equivalentes, pois que uma mesma recta póde ser a diagonal de uma infinidade de parallelogrammos differentes.

O problema de composição das forças é, portanto, determinado e o da decomposição indeterminado.

Destas relações geometricas deduzem-se facilmente as relações algebricas existentes entre as forças componentes

$$P_1 \text{ e } P_2$$

e a sua resultante *R*.

sendo esta a diagonal de um parallelogrammo construido sobre as suas componentes, si representarmos por

$$\alpha, \beta \text{ e } \theta,$$

respectivamente, os angulos formados por

$$P_1 \text{ e } P_2$$

com a resultante e entre si, temos:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}, \quad \frac{R}{P_1} = \frac{sen\,\theta}{sen\,\beta}, \quad \frac{R}{P_2} = \frac{sen\,\theta}{sen\,\alpha} \qquad (1)$$

ou

$$sen\,\alpha = \frac{P_2}{R} sen\,\theta, \quad sen\,\beta = \frac{P_1}{R} sen\,\theta,$$

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos\theta$$

Taes são as tres equações fundamentaes por meio das quaes resolvem-se todas as questões relativas á composição de duas forças concorrentes ou a decomposição de uma força em outras duas.

Entre as seis quantidades

$$R,\ P_1,\ P_2,\ \alpha,\ \beta \text{ e } \theta$$

existindo as mesmas relações que entre os seis elementos constituintes de um triangulo, para que essas quantidades sejam determinadas é necessario que, pelo menos, tres dellas sejam dadas e destas pelo menos uma deve ser sempre uma das forças; as outras tres serão fornecidas pelas equações (1).

No problema da decomposição sendo dada apenas a resultante R, tres das outras cinco quantidades são determinadas pelas tres equações e duas ficam inteiramente arbitrarias, o problema é indeterminado.

Si as duas componentes são perpendiculares entre si temos:

$$sen\ \theta = 1\ ,\ sen\ \beta = cos\ \alpha$$

e as fórmulas reduzem-se a:

$$sen\ \alpha = cos\ \beta = \frac{P_2}{R}\ ,\ cos\ \alpha = \frac{P_1}{R}\ ,\ R_2 = P_1^2 + P_2^2$$

Neste caso a questão é determinada desde que sejam dadas duas das quantidades

$$R,\ P_1\ ,\ P_2\ \text{e}\ \alpha\ ,$$

Considerando dous eixos coordenados rectangulares segundo as direcções das componentes, a equação da resultante será a de uma linha passando pela origem ou

$$y = x\ tg\ \alpha = x\ \frac{cos\ \beta}{cos\ \alpha}\ ;$$

substituindo

$$cos\ \beta\ \text{e}\ cos\ \alpha$$

pelos seus valores teremos:

$$y = \frac{P_2}{P_1}\ x$$

ou, finalmente, representando por

$$X\ \text{e}\ Y$$

as componentes segundo os dous eixos coordenados ;

$$y = \frac{Y}{X}\ x$$

Na questão de decomposição segundo duas direcções perpendiculares sendo dada a resultante e o angulo que ella forma com um dos eixos ou direcções consideradas, nada resta de arbitrario, sendo cada uma das componentes deter-

minadas pelo producto da força dada pelo seno ou coseno do angulo dado, isto é:

$$P_1 = R \cos \alpha, \; P_2 = R \operatorname{sen} \alpha$$

De um ponto qualquer n da resultante (fig. 25), baixando as perpendiculares

$$nn' \; , \; nn''$$

sobre as direcções das componentes, e de um ponto qualquer m'' de uma das componentes P_2, baixando as perpendiculares

$$mm'', \text{ e } m''m'$$

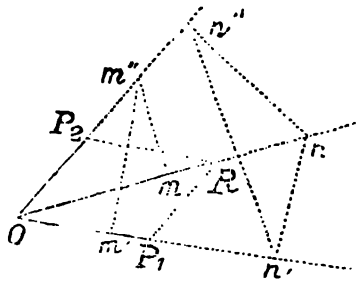


Fig. 25

sobre as direcções da resultante e da outra componente; representando as duas primeiras por

$$d_1 \text{ e } d_2$$

e as duas segundas por

$$d' \text{ e } r \, ,$$

os triangulos

$$nn''o \; , \; nn'o \; , \text{ e } m''mo \; , \; m''m'o$$

nos dão:

$$nn' = on \, . \, \operatorname{sen} \alpha \; , \; nn'' = on \operatorname{sen} \beta \, ,$$

donde

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{d_2}{d_1} \, ;$$

$$m''m = o \, m'' \operatorname{sen} \beta \, , \; m''m' = o \, m'' \operatorname{sen} \theta \, ,$$

donde

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{d'}{r}$$

Comparando estas relações com as fórmulas (1), resulta:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_2}{d_1}, \quad \frac{R}{P_1} = \frac{d'}{r} \tag{2}$$

Unindo os pontos

$$n' \text{ e } n''$$

e representando a distancia entre dous pontos das componentes

$$n' \, n'' \text{ por } d$$

temos:

$$d_2 = d_1^2 + d_2^2 + 2\, d_1\, d_2 \cos \theta$$

A resultante das duas forças tem pois uma direcção tal que as distancias de um qualquer de seus pontos ás duas componentes, são inversamente proporcionaes a essas componentes, e a resultante e uma qualquer das componentes são inversamente proporcionaes ás suas distancias a outra componente.

Esta propriedade nos permitte determinar a situação da resultante independentemente do conhecimento do ponto de concurso.

O caso de um numero qualquer de forças concorrentes:

$$P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$$

existentes no mesmo plano resolve-se facilmente referindo-o á composição e decomposição binarias segundo dous eixos rectangulares.

Decompondo cada uma das forças consideradas segundo os dous eixos coordenados teremos, respectivamente, para as componentes de cada uma dellas segundo os eixos dos x e y:

$$(P_1 \cos \alpha, P_1 \cos \beta_1), (P_2 \cos \alpha_2, P_2 \cos \beta_2),$$
$$(P_3 \cos \alpha_3, P_3 \cos \beta_3), \ldots\ldots$$

sendo:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \qquad \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots$$

os angulos que cada uma dellas forma respectivam en tecom cada um dos eixos.

Fica assim a questão reduzida a composição de forças que actuam segundo cada um dos eixos em uma unica por meio de uma simples somma algebrica, de sorte que si representarmos as duas resultantes por

$$X \text{ e } Y$$

teremos:

$$X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \ldots\ldots$$

$$Y = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \ldots\ldots$$

ou de um modo geral:

$$X = \Sigma P \cos \alpha' \qquad Y = \Sigma P \cos \beta'$$

Em ultima analyse, pois, refere-se a questão á composição destas duas forças rectangulares em uma unica.

Por conseguinte a resultante geral de todas as forças nos será dada em grandeza e direcção pelas equações:

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad \cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}$$

No caso mais simples de forças não existentes no mesmo plano, que é aquelle em que ellas são apenas tres, sendo a resultante a diagonal do parallelipipedo construido sobre essas tres forças, si as representarmos por

$$P_1, P_2 \text{ e } P_3$$

e por

$$P_1\widehat{P_2},\ P_1\widehat{P_3},\ P_2\widehat{P_3}$$

os angulos que ellas formam entre si duas a duas, a resultante nos será dada pela relação que liga a diagonal as tres arestas contiguas:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2 P_1 P_2 \cos P_1\widehat{P_2} +$$

$$+ 2 P_1 P_3 \cos P_1\widehat{P_3} + 2 P_2 P_3 \cos P_2\widehat{P_3}$$

Si as tres forças forem perpendiculares entre si, referindo-as a um systema de eixos rectangulares tendo para origem o ponto de applicação e dirigidos segundo cada uma das componentes, representando por

$$\alpha, \beta, \gamma$$

os angulos formados pela resultante com cada um dos eixos ou com as componentes e designando estas respectivamente por

$$X, Y \text{ e } Z$$

temos:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Élevando ao quadrado as tres primeiras e sommando-as membro a membro temos:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

ou

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Taes são as equações fundamentaes por meio das quaes determina-se em grandeza e direcção a resultante de tres forças perpendiculares entre si quando são dadas as componentes, ou decompõe-se em tres forças rectangulares uma outra dada em grandeza e direcção.

Referindo a resultante assim decomposta a tres outros eixos rectangulares parallelos aos primeiros, representando por

$$x', y' \text{ e } z'$$

as coordenadas da origem primitiva ou do ponto de applicação da resultante em relação aos novos eixos, as coordenadas do outro ponto extremo dessa resultante serão:

$$x' + X, \quad y' + Y, \quad z' + Z$$

A resultante sendo uma recta passando por esses dous pontos as suas equações serão da fórma :

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'} (z - z'), \quad y - y' =$$

$$= \frac{y'' - y'}{z'' - z'} (z - z')$$

Substituindo

$$x'', y'', z''$$

por seus valores, teremos, finalmente, para equação da resultante de tres forças rectangulares :

$$x - x' = \frac{X}{Z} (z - z'), \quad y - y' = \frac{Y}{Z} (z - z')$$

Supponhamos agora que se procura decompor uma força R, cujo ponto de applicação pertence a uma superficie dada, em duas outras P_1 P_2 respectivamente segundo a normal e segundo a tangente a superficie nesse ponto.

Seja

$$f(x, y, z) = o$$

a equação da superficie e

$$a, b \text{ e } c$$

os angulos formados pela normal á superficie no ponto

$$(x, y, z)$$

com tres eixos rectangulares ;

$$\alpha, \beta, \gamma, \theta$$

os angulos formados pela força dada R com os eixos coordenados e com a normal.

Os valores de

$$a, \quad b \text{ e } c$$

nos são dados pelas formulas:

$$\cos a = \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos b = \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos c = \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}$$

$$R, \quad \alpha, \quad \beta \text{ e } \gamma$$

como vimos, nos serão dadas pelas formulas:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

O angulo θ, formado pela força R com a normal, nos é dado pela formula:

$$\cos \theta = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma$$

Substituindo

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, \quad \cos a \cos b \cos c$$

pelos seus valores, e fazendo

$$\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2} = D,$$

temos:

$$\cos \theta = \frac{X \frac{df}{dx} + Y \frac{df}{dy} + Z \frac{df}{dz}}{R\ D}$$

A componente segundo a normal ou

$$R \cos \theta$$

tem, pois, para valor :

$$P_1 = R \cos \theta = \frac{X \frac{df}{dx} + Y \frac{df}{dy} + Z \frac{df}{dz}}{D}$$

A componente segundo a tangente

$$P_2 \quad \text{ou} \quad R \operatorname{sen} \theta$$

terá para valor:

$$P_2 = R \operatorname{sen} \theta = R \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Substituindo

$$\cos \theta, \ D \ \text{e} \ R$$

pelos seus valores, temos:

$$P_2 = R \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{\left(X \frac{df}{dy} - Y \frac{df}{dx}\right)^2 + \left(Z \frac{df}{dx} - X \frac{df}{dz}\right)^2 + \left(Y \frac{df}{dz} - Z \frac{df}{dy}\right)^2}}{D}.$$

Para ter os angulos

$$\delta, \quad \delta', \quad \delta''$$

que determinam a direcção de P_2 ou os angulos formados por esta força com os eixos coordenados, notaremos que se decompuzermos

$$P_1 \ \text{e} \ P_2 \ \text{ou} \ R \cos \theta \ \text{e} \ R \operatorname{sen} \theta$$

segundo esses tres eixos, as forças componentes segundo esses eixos serão equivalentes as componentes de R segundo os mesmos eixos ou a

$$X, \quad Y \quad \text{e} \quad Z,$$

e, portanto:

$$X = R \cos \theta \cos \delta + R \operatorname{sen} \theta \cos \delta.$$

donde:

$$\cos\delta = \frac{\frac{X}{R} - \cos\theta\cos\alpha}{\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \frac{\frac{X}{R} - \frac{X\frac{df}{dx} + Y\frac{df}{dy} + Z\frac{df}{dz}}{R\,D^2}\cdot\frac{df}{dx}}{\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \frac{\left(X\frac{df}{dy} - Y\frac{df}{dx}\right)\frac{df}{dy} - \left(Z\frac{df}{dx} - X\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dz}}{D\sqrt{\left(X\frac{df}{dy} - Y\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(Z\frac{df}{dx} - X\frac{df}{dz}\right)^2 + \left(Y\frac{df}{dz} - Z\frac{df}{dy}\right)^2}}$$

Para δ' e δ'' achariamos, de modo identico:

$$\cos\delta' = \frac{\left(Y\frac{df}{dz} - Z\frac{df}{dy}\right)\frac{df}{dz} - \left(X\frac{df}{dy} - Y\frac{df}{dx}\right)\frac{df}{dx}}{D\sqrt{\left(X\frac{df}{dy} - Y\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(Z\frac{df}{dx} - X\frac{df}{dz}\right)^2 + \left(Y\frac{df}{dz} - Z\frac{df}{dy}\right)^2}}$$

$$\cos\delta'' = \frac{\left(Z\frac{df}{dx} - X\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dx} - \left(Y\frac{df}{dz} - Z\frac{df}{dy}\right)\frac{df}{dy}}{D\sqrt{\left(X\frac{df}{dy} - Y\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(Z\frac{df}{dx} - X\frac{df}{dz}\right)^2 + \left(Y\frac{df}{dz} - Z\frac{df}{dy}\right)^2}}$$

Ficam por este modo determinadas as componentes em grandeza e direcção.

Si o ponto de applicação da força considerada pertence, não a uma superficie, mas a uma curva e procura-se decompol-a em duas outras, segundo a normal e a tangente no ponto

$$(x, \quad y, \quad z),$$

temos:

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}$$

Representando por ds a differencial do arco da curva e por

$$a, \quad b, \quad c$$

os angulos formados pela tangente com os eixos coordenados, temos.

$$\cos a = \frac{dx}{ds}, \quad \cos b = \frac{dy}{ds}, \quad \cos c = \frac{dz}{ds}$$

Representando por θ o angulo formado pela força R com a tangente, temos:

$$\cos \theta = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma =$$

$$= \frac{X}{R} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R} \frac{dz}{ds} = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{R\,ds}$$

A componente segundo a tangente terá para valor:

$$P_1 = R \cos \theta = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}.$$

A componente segundo a normal terá para valor:

$$P_2 = R \operatorname{sen} \theta = R \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta} =$$

$$= \sqrt{\frac{R^2\,ds^2 - (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)^2}{ds^2}} =$$

$$= \left[\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) -}{ds^2} \right.$$

$$\left. - \frac{(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)^2}{ds^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(X \frac{dy}{ds} - Y \frac{dx}{ds}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(Y \frac{dz}{ds} - Z \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(Z \frac{dx}{ds} - X \frac{dz}{ds}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Os angulos formados pela componente segundo a normal com os eixos coordenados e que determinam a sua direcção, obtem-se de modo identico ao que seguimos para a componente segundo a tangente, no caso anterior.

Ao caso fundamental da composição de tres forças rectangulares reduzem-se todos os outros.

Supponhamos um numero qualquer de forças convergentes:

$$p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots ; \text{ e } \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \ldots\ldots$$

os angulos que formam respectivamente com cada um dos tres eixos coordenados rectangulares.

Decompondo cada uma das forças segundo os tres eixos e designando por

$$X, \quad Y \quad \text{e} \quad Z$$

as resultantes de todas as componentes segundo cada um dos eixos, temos:

$$\left.\begin{aligned} X &= p_1 \cos \alpha_1 + p_2 \cos \alpha_2 + p_3 \cos \alpha_3 + \ldots\ldots = \Sigma P \cos \alpha' \\ Y &= p_1 \cos \beta_1 + p_2 \cos \beta_2 + p_3 \cos \beta_3 + \ldots\ldots = \Sigma P \cos \beta' \\ Z &= p_1 \cos \gamma_1 + p_2 \cos \gamma_2 + p_3 \cos \gamma_3 + \ldots\ldots = \Sigma P \cos \gamma' \end{aligned}\right\} (n)$$

Representando por R a resultante geral e por

$$\alpha, \quad \beta \quad \text{e} \quad \gamma$$

os angulos que ella fórma com cada um dos eixos ou com cada uma das componentes

$$X, \quad Y \quad \text{e} \quad Z,$$

temos:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \ \cos \alpha = \frac{X}{R}, \cos \beta = \frac{Y}{R}, \cos \gamma = \frac{Z}{R} \quad (n')$$

Si as forças acham-se situadas em um unico plano, considerando esse plano como o dos $x\ y$, as equações serão:

$$R^2 = X^2 + Y^2, \ \cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}$$

Si todas actuam segundo uma mesma direcção, as equações ficam reduzidas a :

$$X = \Sigma P = R$$

A resultante não dependendo da direcção dos eixos coordenados, que é arbitraria, e, portanto, dos angulos

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \beta_1, \beta_2 \ldots, \ldots \gamma_1, \gamma_2 \ldots\ldots$$

mas pura e simplesmente das componentes e dos angulos que estas formam entre si, vamos determinar a sua expressão em formação destas quantidades.

As equações (n) nos dão:

$$X^2 = \left[p_1 \cos \alpha_1 + p_2 \cos \alpha_2 + \ldots\right]^2 ,$$

$$Y^2 = \left[p_1 \cos \beta_1 + p_2 \cos \beta_2 + \ldots\right]^2 ,$$

$$Z^2 = \left[p_1 \cos \gamma_1 + p_2 \cos \gamma_2 + \ldots\right]^2$$

Substituindo estes valores na primeira das equações (n'), temos :

$$R^2 = \left(p_1 \cos \alpha_1 + p_2 \cos \alpha_2 + \ldots\right)^2 + \left(p_1 \cos \beta_1 + p_2 \cos \beta_2 + \ldots\right)^2 +$$

$$+ \left(p_1 \cos \gamma_1 + p_2 \cos \gamma_2 + \ldots\right)^2 = \left(p_1^2 \cos^2 \alpha_1 + p_2^2 \cos^2 \alpha^2 +\right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + 2 p_1 p_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2 p_1 p_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \ldots\ldots\right) +$$

$$+ \left(p_1^2 \cos^2 \beta_1 + p_2^2 \cos^2 \beta_2 + \ldots\ldots + 2 p_1 p_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 +\right.$$

$$\left. + 2 p_1 p_3 \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \ldots\ldots\right) + \left(p_1^2 \cos^2 \gamma_1 + p_2^2 \cos^2 \gamma_2 + \ldots\ldots +\right.$$

$$\left. + 2 p_1 p_2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + 2 p_1 p_3 \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 + \ldots\ldots\right) =$$

$$= p_1^2 \left(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1\right) + p_2^2 \left(\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2\right) +$$

$$+ \ldots\ldots + 2 p_1 p_2 \left(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2\right) +$$

$$+ 2 p_1 p_3 \left(\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3\right) + \ldots\ldots$$

Sendo

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1, \quad \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1, \text{ etc.}$$

e

$$\cos \widehat{p_1 p_2} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

$$\cos \widehat{p_1 p_3} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3$$

$$\cos \widehat{p_2 p_3} = \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3$$

.....

temos, finalmente, para a expressão da resultante em formação das componentes e dos angulos que ellas formam entre si duas a duas :

$$R = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots\ldots +$$
$$+ 2\, p_1 p_2 \cos \widehat{p_1 p_2} + 2\, p_1 p_3 \cos \widehat{p_1 p_3} + 2\, p_2 p_3 \cos \widehat{p_2 p_3} + \ldots\ldots$$

Considerando uma recta qualquer formando com os eixos coordenados os angulos

$$a, \quad b \quad \text{e} \quad c,$$

multiplicando as equações :

$$R \cos \alpha = \Sigma P \cos \alpha', \qquad R \cos \beta = \Sigma P \cos \beta',$$
$$R \cos \gamma = \Sigma P \cos \gamma'$$

respectivamente por

$$\cos a, \quad \cos b, \quad \cos c$$

e sommando-as membro a membro, temos :

$$R \left(\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma \right) =$$
$$= \Sigma P \left(\cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' \cos c \cos \gamma' \right)$$

Sendo o coefficiente de R o coseno do angulo formado pela recta considerada com a resultante R, e o de P o coseno do

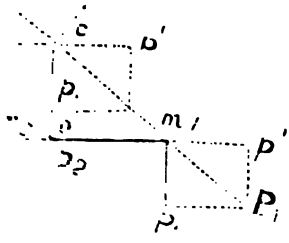
[illegible] cada uma das forças com a mesma [illegible] *projecção da resultante de um nu-* [illegible] *forças convergentes sobre uma recta* [illegible] *somma algebrica das projecções das* [illegible] *sobre a recta*, ou que *avaliadas segundo* [illegible] *resultante é igual á somma algebrica*

[illegible] As forças são parallelas reduz-se facil- [illegible] ao das forças concurrentes. [illegible] as forças parallelas

p_1 e p_2

[illegible]

m_1 e m_2 Fig. (26)



[illegible]

[illegible] pontos invariavelmente ligados [illegible] constituido nenhuma alteração [illegible] forças aos pontos

[illegible] e m_2

[illegible]

e p

[illegible] segundo a direcção

[illegible] m_1.

[illegible] das duas forças que actuam [illegible] o systema primitivo de duas

forças parallelas substituido por um outro equivalente de duas forças convergentes

$$P_1 \text{ e } P_2 .$$

Prolongando estas até encontrarem-se, suppondo os seus pontos de applicação transportados para o ponto de encontro c, decompondo-as nesse ponto: uma em duas

$$p'' \text{ e } p_2$$

parallelas ás correspondentes primitivas e a outra em duas

$$p' \text{ e } p_1$$

parallelas as que lhes correspondem, fica substituido o systema dado por um outro equivalente de quatro forças actuando sobre o ponto c, duas das quaes

$$p' \text{ e } p''$$

sendo iguaes e contrarias destroem-se, e as outras duas

$$p_1 \text{ e } p_2$$

actuando no mesmo sentido e segundo a mesma direcção tem uma resultante igual á sua somma ou igual a

$$\left(p_1 + p_2 \right),$$

que é a resultante do systema dado.

A resultante de duas forças parallelas e do mesmo sentido é, pois, parallela ás componentes e igual a sua somma.

Suppondo o ponto de applicação da resultante transportado para o ponto o em que a sua direcção encontra a linha que une os pontos de applicação das componentes, os triangulos

$$p_2 \; P_2 \; m_2 \quad \text{o} \quad m_2 \; o \; c,$$

nos dão:

$$\frac{m_2 o}{oc} = \frac{P_2 p_2}{p_2 m_2} = \frac{p''}{p_2} = \frac{p'}{p_2}$$

Os triangulos

$$p_1 \; P_1 \; m_1 \quad \text{e} \quad m_1 \; o \; c,$$

nos dão:

$$\frac{m_1 \; o}{o \; c} = \frac{P_1 p_1}{p_1 m_1} = \frac{p'}{p_1}$$

Dividindo membro a membro, temos:

$$\frac{m_1 \; o}{m_2 \; o} = \frac{p_2}{p_1},$$

isto é, o ponto de applicação da resultante divide a distancia entre as duas forças componentes em duas partes inversamente proporcionaes a essas forças.

Supponhamos as duas forças

$$p_1 \quad \text{e} \quad p_2$$

actuando em sentido contrario, fig. (27).

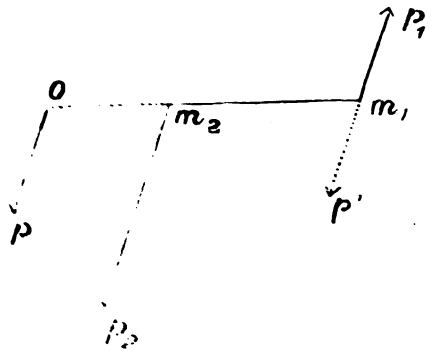


Fig. 27

Substituindo a maior das duas p_2 por duas outras parciaes, uma p' applicada em m_1, igual e contrario a p_1 e a outra p'' igual a

$$(p_2 - p_1),$$

applicada em um ponto o tal que tenhamos:

$$\frac{p'}{p''} = \frac{m_2 m_1}{m_1 o},$$

fica o systema primitivo de duas forças parallelas actuando em sentidos contrarios, substituido por um outro equivalente de tres forças: duas iguaes e contrarias, actuando segundo a mesma direcção sobre o ponto m_1, as quaes neutralisam-se, e a terceira igual á differença entre as duas primitivas, actuando sobre um ponto o, no mesmo sentido que a maior das forças dadas, e que é a resultante da acção simultanea das tres forças e, portanto, das duas primitivas.

A resultante de duas forças parallelas actuando em sentidos contrarios é, pois, parallela ás componentes e igual a sua differença.

Quanto ao ponto de applicação temos:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{m_2 m_1}{m_2 o},$$

donde:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2 m_1 + o\, m_2}{o m_2} = \frac{o m_1}{o m_2},$$

isto é, o ponto de applicação da resultante acha-se afastado das componentes de distancias que lhes são inversamente proporcionaes.

Um e outro caso das forças parallelas são geometricamente resolvidos pela applicação do methodo geral a que chegamos pelo emprego do parallelogramo das forças, sem hypothese alguma sobre a direcção destas. Consideremos as duas forças parallelas actuando no mesmo sentido, fig. (28).

Por um ponto qualquer a' do seu plano tire-se $a'\ b'$ igual e parallela a p_1, e pelo extremo b' a recta $b'\ c'$ igual e parallela a p_2, ou pelo ponto a' tire-se uma parallela ás forças dadas e a partir desse ponto tome-se:

$$a'\ b' = p_1,$$

e a partir de b'

$$b'\ c' = p_2;$$

a recta que une os dous extremos

$$a' \text{ e } c'$$

do polygono transformado neste caso em linha recta é igual e parallela á resultante procurada. Portanto:

$$R = a'\ c' = a'\ b' = d_1 + p_1.$$

Una-se um ponto qualquer o' aos pontos

$$a',\ b' \text{ e } c';$$

por um ponto A tire-se uma parallela a $o'\ a'$ até encontrar a direcção da força p_1, pelo ponto de encontro a tire-se uma

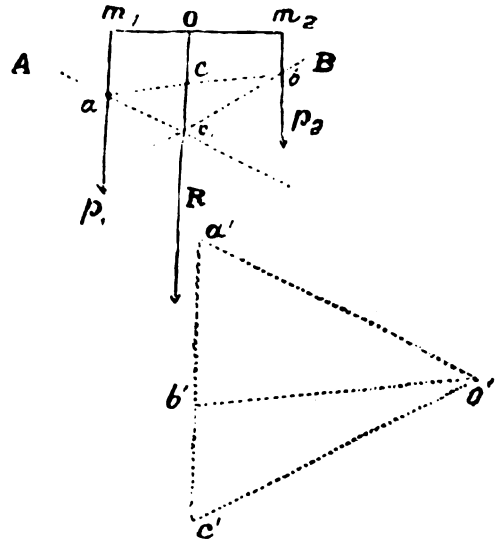


Fig. 23

parallela a $a'\ b'$ até encontrar a direcção da outra força p_2, e, finalmente, por este segundo ponto de encontro tire-se, uma parallela a $a'\ c'$.

Prolongando-se

$$Aa \text{ e } Bb$$

até encontrarem-se teremos no ponto de encontro o_1 um ponto da direcção da resultante procurada.

Tirando-se por este ponto uma parallela a $a'\ c'$ e, portanto, as forças dadas, prolongando-a até encontrar $m'\ m_2$,

tomando a partir do ponto de encontro o uma grandeza $o\ R$ igual a $a'\ c'$ teremos a resultante das duas forças consideradas sua direcção, intensidade e situação.

Consideremos as duas forças actuando em sentidos contrarios, fig. (29).

Por um ponto qualquer a' tire-se $a'\ b'$ igual, parallela e no mesmo sentido que p_2 e pelo extremo b' tire-se $b'\ c'$, igual, parallela e no mesmo sentido que p_1, isto é, tire-se

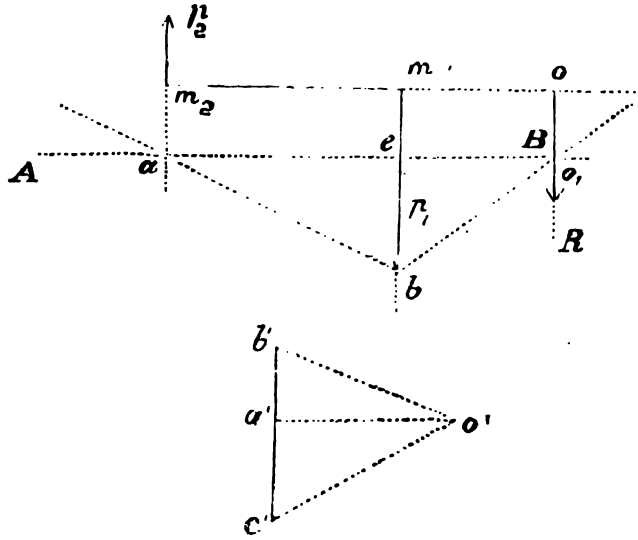


Fig. 29

por a' uma parallela ás duas forças consideradas e sobre ella tome-se

$$a'\ b' = p_2 \quad \text{e} \quad b'\ c' = p_1.$$

A resultante, sempre representada em grandeza e direcção pela recta que une os dous extremos, será, neste caso:

$$R = a'\ c' = b'\ c' - a'\ b' = p_1 - p_2,$$

isto é, é igual á differença das duas forças componentes e actua no mesmo sentido que a maior.

Tomemos um ponto qualquer o' e unamos aos pontos

$$a',\ b',\ c';$$

tirando pelo ponto A qualquer, uma parallela a $a'\ o'$ até encontrar a direcção da força p_2, pelo ponto de encontro a uma parallela a $o'\ b'$ até encontrar a direcção da força p_1, e, finalmente, por este segundo ponto de encontro b uma parallela a $o'\ c'$; prolongando-se

$$Aa \quad \text{e} \quad Bb$$

até encontrarem-se, teremos no ponto de encontro o_1 um ponto da direcção da resultante.

Traçando-se por esse ponto uma parallela a $b'\ c'$ ou ás forças dadas e prolongando-a até encontrar $m_1\ m_2$; tomando a partir de o uma grandeza igual a

$$\left(p_1 - p_2\right)$$

teremos, finalmente, a resultante procurada $O\ R$ em grandeza, direcção e situação.

Os triangulos semelhantes:

$$e\ o_1\ b \quad \text{e} \quad o'\ a'\ c'$$

nos dão:

$$\frac{e\ o_1}{e\ b} = \frac{o'\ a'}{a'\ c'} = \frac{o'\ a'}{R},$$

donde:

$$e\ o_1 \times R = o'\ a' \times e\ b;$$

os triangulos

$$a\ e\ b \quad \text{e} \quad b'\ a'\ o'$$

nos dão:

$$\frac{a\ e}{e\ b} = \frac{o'\ a'}{a'\ b'} = \frac{o'\ a'}{p_2}$$

donde:

$$a\ e \times p_2 = o'\ a' \times e\ b;$$

portanto:

$$a\ e \times p_2 \quad e\ o_1 \times R = e\ o_1 \left(p_1 - p_2\right) = e\ o_1 \cdot p_1 - e\ o_1 \cdot p_2$$

$$e\ o_1 \cdot p_1 - p_2 \left(a\ e + e\ o_1\right) = o_1\ a \cdot p_2$$

portanto:

$$d_1\ p_1 = d_2\ p_2, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Estas relações nos permittem determinar o ponto de applicação da resultante de duas forças parallelas.

Supponhamos as duas forças actuando no mesmo sentido, fig. (30)

Tomando sobre p_2, a partir do ponto extremo c, uma grandeza $c\ a$ igual a p_1, e tomando sobre p_1 a partir do extremo opposto p_1 uma grandeza $p_1\ b$ igual a $a\ p_2$, unindo

$$c\ a\ p_1 \quad o \quad b\ a\ a,$$

o ponto de encontro o das duas linhas será um ponto da direcção da resultante, pois que os triangulos

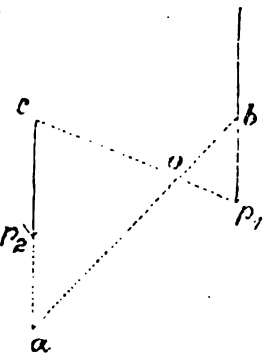


Fig. 30

$$c\ o\ a \quad o \quad o\ b\ p_1$$

nos dão:

$$\frac{c\ o}{p_1\ o} = \frac{c\ a}{b\ p_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Consideremos as duas forças actuando em sentidos contrarios, fig. (31).

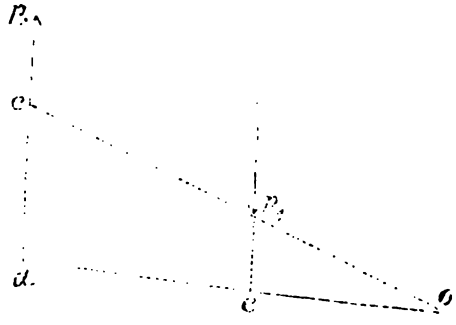


Fig. 31

Tomando sobre p_2 a partir de c

$$c\ d = p_1$$

e sobre p_1, a partir de p_1

$$p_1\ e = p_2,$$

unindo

$$c \ a \ p_1 \quad \text{e} \quad d \ \text{a} \ e,$$

prolongando essas linhas até encontrarem-se teremos em o um ponto da direcção da resultante, pois que os triangulos:

$$c \ o \ d \quad \text{e} \quad p_1 \ o \ e$$

nos dão:

$$\frac{o \ d}{o \ e} = \frac{p_1}{p_2}$$

ou

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Supponhamos n forças parallelas e no mesmo sentido:

$$p_1, \ p_2, \ p_3, \ etc.$$

applicadas respectivamente aos pontos:

$$m_1, \ m_2, \ m_3, \ etc.$$ fig. (32).

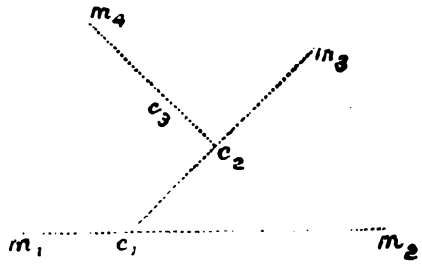


Fig. 32

Unindo o ponto

$$m_1 \quad \text{a} \quad m_2$$

e determinando o ponto c_1 como acabamos de fazer, teremos:

$$\frac{m_1 \ m_2}{m_1 \ c_1} = \frac{p_1 + p_2}{p_2}$$

donde:

$$m_1 \ c_1 = \frac{m_1 \ m_2 \times p_2}{p_1 + p_2}$$

Podemos, pois, substituir as duas forças

$$p_1 \text{ e } p_2$$

por uma equivalente igual a

$$\left(p_1 + p_2\right)$$

applicada em c_1. Unindo

$$c_1 \text{ a } m_3$$

e determinando c_2 do mesmo modo temos:

$$\frac{c_1 m_3}{c_1 c_2} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p_3},$$

donde:

$$c_1 c_2 = \frac{c_1 m_3 \times p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Podemos, pois, substituir as tres forças

$$p_3, p_2 \text{ e } p_1$$

por uma equivalente igual a

$$\left(p_1 + p_2 + p_3\right),$$

applicada em c_2. Unindo

$$c_2 \text{ a } m_4$$

e procedendo de modo identico temos:

$$\frac{c_2 m_4}{c_2 c_3} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{p_4},$$

donde:

$$c_2 c_3 = \frac{c_2 m_4 \times p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4},$$

e assim successivamente até a composição da penultima resultante com a ultima força que nos daria o ponto de applicação da resultante total.

A resultante seria:

$$R = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots$$

ou

$$R = \Sigma\, p$$

Este ultimo ponto é o que denomina-se centro de forç parallelas, e como vemos, sendo elle independente do va absoluto de cada uma das forças e de suas direcções, m tem-se constante desde que se conserve o parallelismo d forças e as relações de suas grandezas, qualquer que sej ordem da composição.

As relações algebricas entre a resultante e as suas co ponentes parallelas obtêm-se directamente das equaçõe que chegamos no caso das forças convergentes mediante hypotheses convenientes, relativas ao angulo formado pe componentes.

Consideremos duas forças convergentes

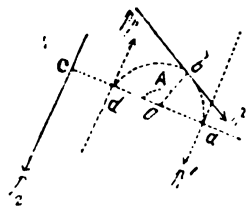


Fig. 33

p_1 e p_2 fig. 6

e de um ponto qualquer o baixem as perpendiculares

$o\,b$ e $o\,c$

sobre as suas direcções.

O angulo em o, Δ, estará ligado ao angulo form por

p_1 e p_2

pela relação

$$\Delta + \theta = 180.$$

Sendo

$$\Delta = 180,$$

o ponto b coincidirá com o ponto a e a força p_1 occupa posição p_1', isto é, as duas forças serão parallelas e do m sentido e o angulo $\theta = o$; sendo $\Delta = o$ o ponto b coinc

o ponto d e a força p_1 occupará a posição p_1'', isto é, as s forças serão parallelas e em sentidos contrarios e o ulo das duas

$$\theta = 180.$$

Se fizermos, pois, nas equações proprias as forças con- gentes $\theta = o$ obteremos as fórmulas relativas a duas forças allelas actuando no mesmo sentido; se fizermos

$$\theta = 180$$

remos as fórmulas relativas á duas forças parallelas tando em sentidos contrarios.

Na primeira hypothese temos:

$$R = P_1 + P_2,\ P_1\, d_1 = P_2\, d_2\ \ d = d_1 + d_2;$$

na segunda temos:

$$R = P_1 - P_2,\ p_1\, d_1 = p_2\, d_2,\ d = d_1 - d_2$$

Quanto á direcção da resultante as fórmulas:

$$sen\ \alpha = \frac{P_2}{R}\ sen\ \theta,\ sen\ \beta = \frac{P_1}{R}\ sen\ \theta$$

um e outro caso nos dão:

$$sen\ \alpha = o,\ sen\ \beta = o,$$

é, a resultante é parallela ás componentes.

Por meio destas fórmulas resolvem-se todas as questões tivas a duas forças parallelas.

Si forem dadas as componentes, determina-se a resul- e pela fórmula:

$$R = P_1 + P_2$$

onto de applicação pelas fórmulas:

$$d_1 = \frac{d\ P_2}{R},\ d_2 = \frac{d\ P_1}{R}$$

A resultante seria:

$$R = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots$$

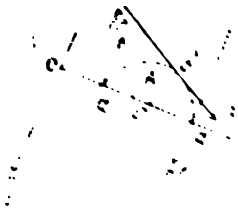
ou

$$R = \Sigma\, p$$

Este ultimo ponto é o que denomina-se centro de forças parallelas, e como vemos, sendo elle independente do valor absoluto de cada uma das forças e de suas direcções, mantem-se constante desde que se conserve o parallelismo das forças e as relações de suas grandezas, qualquer que seja a ordem da composição.

As relações algebricas entre a resultante e as suas componentes parallelas obtêm-se directamente das equações a que chegamos no caso das forças convergentes mediante as hypotheses convenientes, relativas ao angulo formado pelas componentes.

Consideremos duas forças convergentes



p_1 e p_2 fig. (33)

e de um ponto qualquer o baixemos as perpendiculares

$o\,b$ e $o\,c$

[illegible] sobre as suas direcções.

O angulo em o, α, estará ligado ao angulo formado por

p_1 e p_2

pela relação

$$\alpha + \theta = 180.$$

Sendo

$$\alpha = 180,$$

o ponto [illegible] coincidirá com o ponto [illegible] e a força p_1 occupará a posição [illegible] parallelas e do mesmo sentido [illegible] o ponto b coincidirá

com o ponto d e a força p_1 occupará a posição p_1'', isto é, as duas forças serão parallelas e em sentidos contrarios e o angulo das duas

$$\theta = 180.$$

Se fizermos, pois, nas equações proprias as forças convergentes $\theta = o$ obteremos as fórmulas relativas a duas forças parallelas actuando no mesmo sentido; se fizermos

$$\theta = 180$$

obteremos as fórmulas relativas á duas forças parallelas actuando em sentidos contrarios.

Na primeira hypothese temos:

$$R = P_1 + P_2,\ P_1\, d_1 = P_2\, d_2\ \ d = d_1 + d_2;$$

na segunda temos:

$$R = P_1 - P_2,\ p_1\, d_1 = p_2\, d_2,\ d = d_1 - d_2$$

Quanto á direcção da resultante as fórmulas:

$$sen\ \alpha = \frac{P_2}{R}\ sen\ \theta,\ sen\ \beta = \frac{P_1}{R}\ sen\ \theta$$

em um e outro caso nos dão:

$$sen\ \alpha = o,\ sen\ \beta = o,$$

isto é, a resultante é parallela ás componentes.

Por meio destas fórmulas resolvem-se todas as questões relativas a duas forças parallelas.

Si forem dadas as componentes, determina-se a resultante pela fórmula:

$$R = P_1 + P_2$$

e o ponto de applicação pelas fórmulas:

$$d_1 = \frac{d\ P_2}{R},\ d_2 = \frac{d\ P_1}{R}$$

Consideremos as duas forças convergentes

$$P_1 \text{ e } P_2 \qquad \text{fig. (35)}$$

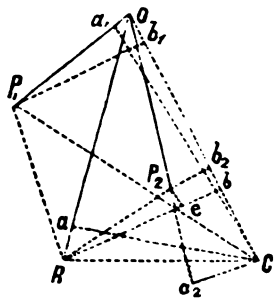


Fig. 35

e a sua resultante R.

De um ponto qualquer do plano dessas forças baixemos sobre as suas direcções as perpendiculares

$$c\,a,\quad c\,a_1,\quad c\,a_2\,;$$

unindo os extremos

$$P_1,\ R \text{ e } P_2$$

de cada uma das forças ao ponto c vê-se que o momento de cada uma dellas ou

$$P_1 \times c\,a_1,\ P_2 \times c\,a_2,\ R \times c\,a$$

é, respectivamente, igual ao dobro da área de um dos triangulos

$$c\,o\,P_1,\ c\,o\,P_2 \text{ e } c\,o\,R$$

que se obtem unindo os extremos de cada força ao centro dos momentos e, portanto, a relação que existe entre esses momentos é a mesma que a que existe entre as áreas desses triangulos.

Baixando dos pontos

$$P_1,\ P_2 \text{ e } R$$

as perpendiculares

$$P_1\,b_1,\ P_2\,b_2 \text{ e } Rb$$

sobre a recta $o\,c$ que une o centro dos momentos ao ponto de applicação das forças, e tirando por P_2 a recta $P_2\,e$, parallela a $c\,c$, temos:

$$Rb = b\,c + c\,R = P_1\,b_1 + c\,R$$

Esta transformação consiste em considerar-se em vez das forças o producto de cada uma por uma determinada distancia, producto a que dá-se a denominação de *momento* da força.

A distancia considerada póde referir-se a um ponto, *centro dos momentos*, ou a um plano; no primeiro caso o momento é o producto da força pela perpendicular baixada do ponto centro sobre a sua direcção; no segundo é o producto da força pela perpendicular, baixada do seu ponto de applicação sobre o plano considerado; os primeiros dependendo apenas da direcção das forças são proprios ás forças convergentes, os segundos dependendo apenas dos pontos de applicação são relativos ás forças parallelas.

O signal de um tal producto, no primeiro caso, é determinado considerando-se a rotação que a força tende a imprimir á perpendicular baixada do ponto sobre a sua direcção: si ella tende a realizar-se da esquerda para a direita, para o observador collocado no centro dos momentos o producto é positivo, e negativo no caso contrario.

Subordinado a esta convenção, o momento da força p_1 fig. (34) relativamente ao ponto o ou o producto

$$\left(p_1 \times o\ a\right)$$

é positivo, e o da força p_2 relativamente ao ponto o' ou

$$\left(p_2 \times o'\ b\right)$$

é negativo.

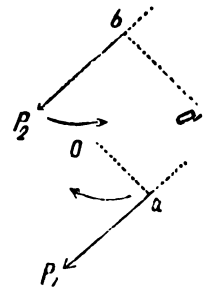


Fig. 34

No segundo caso, isto é, no caso do plano, o momento ou o producto da força pela distancia do seu ponto de applicação ao plano tem o signal determinado pelos signaes proprios aos dous factores.

Consideremos as duas forças convergentes

P_1 e P_2 fig. (35)

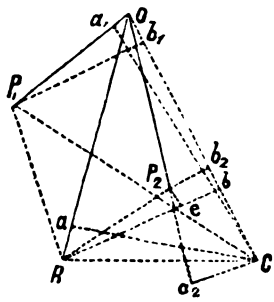


Fig. 35

e a sua resultante R.

De um ponto qualquer do plano dessas forças baixemos sobre as suas direcções as perpendiculares

$$c\,a,\quad c\,a_1,\quad c\,a_2;$$

unindo os extremos

$$P_1,\ R \text{ e } P_2$$

de cada uma das forças ao ponto c vê-se que o momento de cada uma dellas ou

$$P_1 \times c\,a_1,\ P_2 \times c\,a_2,\ R \times c\,a$$

é, respectivamente, igual ao dobro da área de um dos triangulos

$$c\,o\,P_1,\ c\,o\,P_2 \text{ e } c\,o\,R$$

que se obtem unindo os extremos de cada força ao centro dos momentos e, portanto, a relação que existe entre esses momentos é a mesma que a que existe entre as áreas desses triangulos.

Baixando dos pontos

$$P_1,\ P_2 \text{ e } R$$

as perpendiculares

$$P_1\ b_1,\ P_2\ b_2 \text{ e } Rb$$

sobre a recta oc que une o centro dos momentos ao ponto de applicação das forças, e tirando por P_2 a recta $P_2\,e$, parallela a oc, temos:

$$Rb = be + e\,R = P_2\,b_2 + e\,R$$

Os triangulos

$$e\ R\ P_2 \quad \text{e} \quad b_1\ p_1\ o$$

sendo iguaes, temos :

$$P_1\ b_1 = e\ R,$$

portanto:

$$R\ b = P_2\ b_2 + P_1\ b_1;$$

multiplicando ambos os membros por oc, temos :

$$oc \times Rb = oc \times P_2\ b_2 + oc \times P_1\ b_1$$

isto é, o dobro da área do triangulo $c\ o\ R$ é igual á somma do dobro das áreas dos triangulos

$$co\ P_1 \quad \text{e} \quad co\ P_2,$$

e sendo o dobro dessas áreas iguaes aos productos que representam os momentos das forças correspondentes relativamente ao ponto c, temos, designando por

$$r, \quad p_1 \quad \text{e} \quad p_2$$

as perpendiculares baixadas do centro sobre cada uma das forças :

$$R \times r = P_1 \times p_1 + P_2 \times p_2$$

Se o ponto c fosse tomado entre

$$P_1 \quad \text{e} \quad R$$

ou entre

$$P_2 \quad \text{e} \quad R$$

a construcção seria analoga, mas a altura do triangulo correspondente á resultante seria igual á differença das alturas correspondentes ás componentes, e tendo todos elles uma base commum, a linha que une o centro dos momentos ao ponto de applicação, teriamos, nos dois casos:

$$Rr = P_1\ p_1 - P_2\ p_2, \quad Rr = P_2\ p_2 - P_1\ p_1$$

O momento da resultante de duas forças convergente pois, igual á somma algebrica dos momentos das componentes.

Tal é o theorema de Varignon.

Consideremos as duas forças

$$P_1 \text{ e } P_2$$

e a sua resultante R (fig. 36).

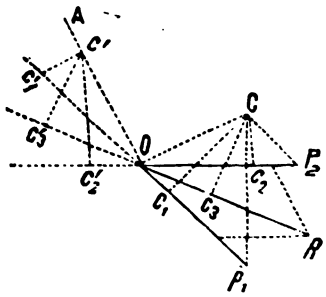


Fig. 36

Sejam

$$\alpha, \beta \text{ e } \gamma$$

os angulos

$$P_1 o c, \quad R o c \text{ e } P_2 o c$$

que formam respectivamente

$$P_1, \quad R \text{ e } P_2$$

com a linha oc que une o pc de applicação o ao centro momentos c.

Temos :

$$2 \text{ area } \triangle R o c = 2 \text{ area } \triangle P_1 o c + 2 \text{ area } \triangle P_2 oc$$

ou

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2,$$

ou, representando oc por a :

$$a . R \operatorname{sen} \beta = a . P_1 \operatorname{sen} \alpha + a P_2 \operatorname{sen} \gamma$$

Considerando a perpendicular oA á linha oc, e dessa p pendicular um ponto qualquer c' temos, entre os momen das forças consideradas relativamente a esse ponto :

$$R \times c' c_3' = P_1 \times c' c_1' + P_2 \times c' c_2'$$

Mas os triangulos rectangulos :

$$c' c_3' o, \quad c' c_1' o, \quad c' c_2' o$$

nos dão, representando por a' a linha que une o ponto de applicação ao novo centro de momentos:

$$c'\,c_2' = a' \times \cos\beta, \quad c'\,c_1' = a' \cos\alpha, \quad c'\,c_2' = a' \cos\gamma.$$

substituindo estes valores, temos:

$$a'\,R \cos\beta = a'\,P_1 \cos\alpha + a'\,P_2 \cos\gamma$$

ou

$$R \cos\beta = P_1 \cos\alpha + P_2 \cos\gamma$$

Estes resultados nos mostram que se relativamente a qualquer dos pontos da linha oc a relação que existe entre os momentos das forças é a mesma que a que existe entre as áreas dos triangulos que se obtem unindo o centro dos momentos c aos extremos de cada uma das forças, relativamente a qualquer dos pontos da recta oc', perpendicular a oc no ponto de applicação, essa relação é a mesma que a que existe entre as projecções das mesmas forças sobre a recta que une o seu ponto de applicação ao centro dos momentos.

Sendo o ponto c e, portanto, a recta oc inteiramente arbitrario, isto é, podendo esse ponto ser um ponto qualquer do plano das forças, conclue-se que relativamente aos pontos do plano os momentos das forças podem ser *successivamente* representados pelas áreas dos triangulos que se obtem unindo o centro dos momentos aos extremos das forças ou pelas projecções destas sobre a recta que une este centro ao ponto de applicação das forças.

Sobre qualquer destes dois aspectos que se considere os momentos, a lei do parallelogrammo das forças, como vamos ver, nos mostra que relativamente a um ponto qualquer do plano o momento da resultante é sempre igual á somma algebrica do momento das componentes uma vez observada a convenção dos signaes.

A traducção algebrica da lei do parallelogrammo, nos dá:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2\,\cos\left(\alpha - \gamma\right),$$

sendo o angulo formado pelas duas forças:

$$\theta = c\,o\,P_1 - c\,o\,P_2 = \alpha - \gamma$$

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2\left(\cos\alpha\,\cos\gamma + sen\,\alpha\,sen\,\gamma\right)$$

ou:

$$R^2\left(sen^2\,\beta + \cos^2\beta\right) = P_1^2\left(sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha\right) +$$

$$+\,P_2^2\left(sen^2\,\gamma + \cos^2\gamma\right) + 2\,P_1\,P_2\cos\alpha\cos\gamma + 2\,P_1\,P_2\,sen\,\alpha\,sen\,\gamma,$$

$$R^2\left(sen^2\,\beta + \cos^2\beta\right) = \left(P_1\,sen\,\alpha + P_2\,sen\,\gamma\right)^2 +$$

$$+\left(P_1\,\cos\alpha + P_2\,\cos\gamma\right)^2$$

donde:

$$R^2\,sen^2\beta - \left(P_1\,sen\,\alpha + P_2\,sen\,\gamma\right)^2 = \left(P_1\,\cos\alpha + P_2\,\cos\gamma\right)^2 -$$

$$-\,R^2\cos^2\beta$$

multiplicando ambos os membros por a^2, temos:

$$a^2\,R^2\,sen^2\,\beta - \left(P_1\,a\,sen\,\alpha + P_2\,a\,sen\,\gamma\right)^2 -$$

$$-\left(P_1\,a\cos\alpha + P_2\,a\,\cos\gamma\right)^2 + a^2\,R^2\cos^2\beta = 0$$

donde:

$$a^2\,R^2\,sen^2\,\beta - \left(P_1\,a\,sen\,\alpha + P_2\,a\,sen\,\gamma\right)^2 = 0,$$

$$a^2\,R^2\cos^2\beta - \left(P_1\,a\cos\alpha + P_2\,a\cos\gamma\right)^2 = 0$$

ou:

$$a\,R\,sen\,\beta = a\,P_1\,sen\,\alpha + a\,P_2\,sen\,\gamma,$$

que como vimos é equivalente a

$$2 \text{ area } \triangle R\, o\, c = 2 \text{ area } \triangle P_1\, o\, c + 2 \text{ area } \triangle P_2\, o\, c,$$

e:

$$a\, R \cos \beta = a\, P_1 \cos \alpha + a\, P_2 \cos \gamma$$

isto é, quer considerados representados pelas áreas dos triangulos, quer pelas projecções das forças, o momento da resultante relativamente a um ponto é sempre igual á somma algebrica dos momentos das componentes.

Consideremos um numero qualquer de forças:

$$P_1,\ P_2,\ P_3\ P_4 \ldots\ldots\ P_n.$$

Representando por R_1 a resultante de

$$P_1 \text{ e } P_2,$$

por R_2 a resultante de

$$R_1 \text{ e } P_3,$$

por R_3 a resultante de

$$R_2 \text{ e } P_4,\ etc.$$

e por R a resultante das forças

$$R_{n-2} \text{ e } P_n$$

ou de todas as forças consideradas; designando respectivamente por

$$p_1,\ p_2,\ p_3 \ldots\ldots$$

as perpendiculares baixadas do centro dos momentos sobre cada uma das forças e por

$$r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots$$

as perpendiculares que se referem ás resultantes, temos:

$$R_1 r_1 = P_1 p_1 + P_2 p_2$$
$$R_2 r_2 = R_1 r_1 + P_3 p_3$$
$$R_3 r_3 = R_2 r_2 + P_4 p_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots$$
$$R_{n-2} r_{n-2} = R_{n-3} r_{n-3} + P_{n-1} p_{n-1}$$
$$R\, r = R_{n-2} r_{n-2} + P_n p_n$$

Sommando membro a membro todas estas igualdades, temos:

$$R_1 r_1 + R_2 r_2 + \ldots\ldots + R_{n-2} r_{n-2} + R r = P_1 p_1 + \ldots\ldots +$$

$$+ P_{n-1} p_{n-1} + P_n p_n + R_1 r_1 + R_2 r_2 + \ldots\ldots + R_{n-2} r_{n-2}$$

donde:

$$R r = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots\ldots + P_n p_n$$

ou:

$$R r = \Sigma P p,$$

isto é, o momento da resultante das n forças é igual á somma dos momentos das n componentes.

Os momentos referidos a um plano, como dissemos, são relativos ás forças parallelas, pois que independentes da direcção das forças subordinam-se apenas ao seu ponto de applicação.

Neste segundo genero de momentos, como no primeiro, o momento da resultante de um numero qualquer de forças parallelas é igual á somma algebrica dos momentos das componentes.

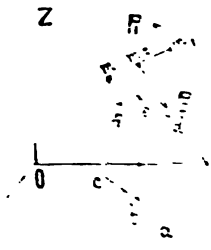


Fig. 37

Consideremos duas forças parallelas

$$P_1 \text{ e } P_2$$

e a sua resultante R (fig. 37).

Baixando dos pontos de applicação

$$m_1, \quad m, \quad m_2,$$

a perpendiculares

$$[illegible], \quad [illegible] \quad e \quad [illegible] \, b$$

sobre o plano dos xy, representando essas perpendiculares respectivamente por

$$z_1, \quad z, \quad z_2,$$

e tirando por m_1 uma parallela $m_1 d$ a recta ab, temos:

$$\frac{R}{P_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 m}, \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 m} = \frac{m_2 d}{m e},$$

donde:

$$R \times m e = P_2 \times m_2 d \qquad (1)$$

Mas sendo

$$m_1 a = e c = d b,$$

temos:

$$R \times ec = \left(P_1 + P_2\right) ec = P_1 \times m_1 a + P_2 \times d b \qquad (2)$$

sommando as igualdades (1) e (2), temos:

$$R \left(me + ec\right) = P_1 \times m_1 a + P_2 \left(m_2 d + db\right)$$

ou:

$$Rz = P_1 z_1 + P_2 z_2$$

isto é, o momento da resultante relativamente ao plano dos xy é igual á somma dos momentos das componentes relativamente ao mesmo plano.

No caso em que as forças sejam em sentidos contrarios (fig. 38), temos:

$$\frac{m_2 e}{m_1 d} = \frac{m m_2}{m m_1}$$

ou

$$\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = \frac{P_1}{P_2}$$

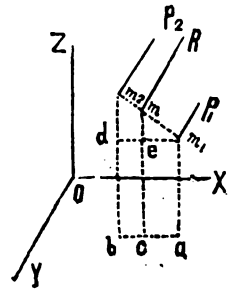


Fig. 38

donde:

$$Rz = P_1 z_1 - P_2 z_2,$$

isto é, o momento da resultante de duas forças parallelas actuando em sentidos contrarios é igual á differença dos momentos das componentes.

Podemos, pois, concluir de um modo geral que o momento da resultante de duas forças parallelas é igual á somma algebrica dos momentos das componentes.

Suppondo os pontos de applicação das forças não mais situados de um mesmo lado do plano dos xy, porém, de um modo qualquer em relação a esse plano e referindo todo o systema a um novo systema de eixos coordenados parallelos aos primeiros e a uma distancia d tal que todos os pontos de applicação a elle referidos tenham as coordenadas z positivas, representando estas ordenadas por

$$z', \quad z'', \quad \text{e} \quad z''',$$

resulta:

$$R\,z' = P_1\,z'' + P''\,z'''$$

Sendo:

$$R = P_1 + P_2$$

teremos, multiplicando esta relação por d:

$$R\,d = P_1\,d + P_2\,d$$

Subtrahindo membro a membro estas duas igualdades, resulta:

$$R\left(z' - d\right) = P_1\left(z'' - d\right) + P_2\left(z''' - d\right).$$

Sendo:

$$z = z' - d, \quad z_1 = z'' - d, \quad z_2 = z''' - d,$$

temos:

$$R\,z = P_1\,z_1 + P_2\,z_2$$

Tomando para plano dos momentos o plano dos yz ou o plano dos zx, teríamos de modo analogo:

$$R\,x = P_1\,x_1 + P_2\,x_2, \quad R\,y = P_1\,y_1 + P_2\,y_2.$$

Consideremos um numero qualquer n de forças. Combinando-as duas a duas chegariamos ás equações :

$$Rx' = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots\ldots + P_n x_n = \Sigma Px$$

$$Ry' = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots\ldots + P_n y_n = \Sigma Py$$

$$Rz' = P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots\ldots + P_n z_n = \Sigma Pz$$

as quaes nos dão para coordenadas do ponto de applicação da resultante total ou do centro de forças parallelas :

$$x' = \frac{\Sigma Px}{R}, \quad y' = \frac{\Sigma Py}{R}, \quad z' = \frac{\Sigma Pz}{R}$$

ou :

$$x' = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad y' = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad z' = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$$

por ser :

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + etc. = \Sigma P.$$

Se o centro achar-se sobre um dos planos coordenados a equação correspondente á coordenada perpendicular a esse plano será nulla ; se achar-se sobre um dos eixos as duas equações correspondentes aos outros dois serão nullas.

Apreciados como acabamos de fazer os dois generos de momentos, relativamente a um ponto e a um plano, vamos agora considerar o caso dos momentos tomados relativamente a um eixo, cujas consequencias teem muita applicação na theoria do movimento.

Consideremos uma força P formando com tres eixos rectangulares os angulos

$$\alpha, \quad \beta \quad \text{e} \quad \gamma$$

e applicada a um ponto cujas coordenadas sejam

$$x, \quad y \quad \text{e} \quad z.$$

Decompondo a força P em tres outras parallelas aos eixos as expressões dessas componentes serão respectivamente a cada eixo:

$$X \text{ ou } P \cos \alpha, \quad Y \text{ ou } P \cos \beta, \quad Z \text{ ou } P \cos \gamma$$

Projectando estas componentes sobre um dos planos coordenados, o dos xy, por exemplo, a componente parallela ao eixo dos z terá uma projecção nulla e as outras duas projectar-se-hão em verdadeira grandeza.

Baixando-se da origem, perpendiculares a estas duas projecções, a perpendicular relativa á projecção de X será igual a y e a relativa a Y igual a x, de sorte que se tomarmos os momentos destas forças em relação á origem teremos para seus valores, observada a convenção que regula os signaes :

$$-Xy \text{ ou } -y\,P \cos \alpha \quad \text{e} \quad Yx \text{ ou } x\,P \cos \beta.$$

Para as projecções sobre o plano dos xz, teriamos :

$$Xz \text{ ou } zP \cos \alpha \quad \text{e} \quad -Zx \text{ ou } -x\,P \cos \gamma$$

e para o plano dos yz :

$$Zy \text{ ou } y\,P \cos \gamma \quad \text{e} \quad -Yz \text{ ou } -z\,P \cos \beta.$$

Sendo a projecção de P sobre cada plano a resultante das projecções de suas componentes sobre o mesmo plano, se representarmos por

$$l, \quad m \quad \text{e} \quad n$$

os momentos das projecções da força considerada sobre cada um dos planos dos

$$zy, \quad zx \quad \text{e} \quad xy,$$

teremos :

$$(A) \begin{cases} l = Zy - Yz = y\,P \cos \gamma - z\,P \cos \beta = P\left(y \cos \gamma - z \cos \beta\right) \\ m = Xz - Zx = z\,P \cos \alpha - x\,P \cos \gamma = P\left(z \cos \alpha - x \cos \gamma\right) \\ n = Yx - Xy = x\,P \cos \beta - y\,P \cos \alpha = P\left(x \cos \beta - y \cos \alpha\right) \end{cases}$$

As quantidades

$$l, \quad m \quad e \quad n$$

denominam-se respectivamente momentos da força P em relação ao eixo dos x, dos y e dos z.

Assim, pois, o momento de uma força relativamente a um eixo vem a ser o momento da projecção dessa força sobre um plano perpendicular a esse eixo, tomado relativamente ao traço do mesmo eixo no plano de projecção.

Consideremos agora o momento da força P relativamente a um eixo qualquer T passando pela origem das coordenadas, e formando com os eixos os angulos A, B e C.

Sendo x, y e z as coordenadas do ponto de applicação da força, e α, β e γ os angulos que esta forma com os eixos coordenados, temos para expressão dos momentos relativamente a esses eixos:

$$l' = P\,(y \cos \gamma - z \cos \beta)$$

$$m' = P\,(z \cos \alpha - x \cos \gamma)$$

$$n' = P\,(x \cos \beta - y \cos \alpha)$$

Representando por θ o angulo formado pela força P com o eixo T dos momentos, a menor distancia entre essas duas rectas passando uma pela origem nos será dada pela formula:

$$h = \frac{(y \cos \gamma - z \cos \beta) \cos A + (z \cos \alpha - x \cos \gamma) \cos B +}{sen\ \theta}$$

$$\frac{+ (x \cos \beta - y \cos \alpha) \cos C}{sen\ \theta}$$

$$= \frac{l' \cos A + m' \cos B + n' \cos C}{P\ sen\ \theta}$$

Como $P\ sen\ \theta$ representa a projecção da força sobre um plano perpendicular ao eixo T teremos para expressão de seu momento relativamente a esse eixo

$$l_1 = P\ sen\ \theta\ h$$

Substituindo h pelo seu valor, temos, finalmente, para expressão do momento da força relativamente ao eixo:

$$l_1 = l' \cos A + m' \cos B + n' \cos C$$

Esta formula nos permitte determinar o momento de uma força relativamente a um eixo qualquer desde que se conheça um ponto desse eixo, os angulos que elle forma com os eixos coordenados a que refere-se a posição do ponto e os momentos da força relativamente aos mesmos eixos.

Considerando um numero qualquer n de forças:

$$P_1,\ P_2,\ P_3 \ldots\ P_n,$$

representando respectivamente, por:

$$l_1,\ m_1,\ n_1,\quad l_2,\ m_2,\ n_2, \ldots\quad l_n,\ m_n,\ n_n$$

os seus momentos relativamente a um systema qualquer de eixos coordenados rectangulares, e fazendo

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n = L \text{ ou } L = \Sigma P\,(y \cos \gamma - z \cos \beta)$$
$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M \text{ ou } M = \Sigma P\,(z \cos \alpha - x \cos \gamma)$$
$$n_1 + n_2 + \ldots + n_n = N \text{ ou } N = \Sigma P\,(x \cos \beta - y \cos \alpha)$$

o momento M de todas as forças relativamente ao mesmo eixo T considerado, será:

$$M = L \cos A + M \cos B + N \cos C$$

Por conseguinte dadas as sommas dos momentos de um systema de forças relativamente a tres eixos coordenados, obtem-se a somma dos momentos das mesmas forças em relação a um eixo qualquer multiplicando as tres sommas respectivamente, pelos cosenos dos angulos formados pelo eixo dos momentos com os eixos coordenados.

Representando $\triangle$ o angulo que o eixo T dos momentos forma com o plano dos $x\,y$, e por $\triangle_1$ o angulo que forma a sua projecção sobre este plano com o eixo dos x temos :

$$\cos A = \cos \triangle \cos \triangle_1, \quad \cos B = \operatorname{sen} \triangle_1 \cos \triangle \quad \cos C = \operatorname{sen} \triangle$$

substituindo estes valores temos para expressão do momento :

$$\text{(e)} \qquad M = L \cos \triangle \cos \triangle_1 + M \operatorname{sen} \triangle_1 \cos \triangle = N \operatorname{sen} \triangle$$

Variando o momento das forças com os angulos $\triangle$ e $\triangle_1$ e portanto com A, B, C vejamos dentre todos os eixos passando pelo mesmo ponto qual aquelle para o qual essa somma de momentos é um *maximum*.

Differenciando em relação a $\triangle_1$ e igualando a zero o coefficiente differencial temos :

$$- L \cos \triangle \operatorname{sen} \triangle_1 + M \cos \triangle_1 \cos \triangle = o$$

donde :

$$tg \triangle_1 = \frac{M}{L}$$

Relativamente a $\triangle$, temos :

$$- L \operatorname{sen} \triangle \cos \triangle_1 - M, \operatorname{sen} \triangle \operatorname{sen} \triangle_1 + N \cos \triangle = o,$$

donde :

$$ty \triangle L \cos \triangle_1 + tg \triangle M \operatorname{sen} \triangle_1 = N$$

Elevando ao quadrado, temos :

$$ty^2 \triangle (L \cos \triangle_1 + M \operatorname{sen} \triangle_1)^2 = N^2$$

donde :

$$ty^2 \triangle = \frac{N^2}{(L \cos \triangle_1 + M \operatorname{cen} \triangle_1)^2}$$

$$= \frac{N^2}{L^2 \cos^2 \triangle_1 \; M^2 \operatorname{sen}^2 \triangle_1 + 2 L M \operatorname{sen} \triangle_1 \cos \triangle^1}$$

dividindo ambos os termos da fracção por

$$\cos^2 \Delta_1$$

resulta:

$$tg^2 \Delta = \frac{\dfrac{N^2}{\cos^2 \Delta_1}}{L^2 + M^2 tg^2 \Delta_1 + 2 L M tg \Delta_1} =$$

$$= \frac{N^2 (1 + tg^2 \Delta_1)}{L^2 + M^2 tg^2 \Delta_1 + 2 L M tg \Delta_1}$$

substituindo

$$tg \Delta_1$$

pelo seu valor, temos :

$$tg \Delta = \frac{N^2 \left(1 + \dfrac{M^2}{L^2}\right)}{L^2 + \dfrac{M^4}{L^2} + 2 M^2} = \frac{N^2 (L^2 + M^2)}{L^4 + M^4 + 2 L^2 M^2} = \frac{N^2}{L^2 + M^2},$$

portanto

$$tg \Delta = \frac{N}{(L^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Taes são os valores de

$$\Delta_1 \text{ e } \Delta$$

que correspondem ao momento *maximum*.

Substituindo estes valores na fórmula :

$$\cos^2 A = \cos^2 \Delta \cos^2 \Delta_1 = \frac{1}{1 + tg^2 \Delta} \times \frac{1}{1 + tg^2 \Delta_1},$$

temos :

$$\cos^2 A = \frac{L^2}{L^2 + M^2 + N^2};$$

portanto

$$\cos A = \frac{L}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Substituindo os mesmos valores na expressão de

$$\cos B,$$

temos :

$$\cos^2 B = \operatorname{sen}^2 \triangle_1 \cos^2 \triangle = \frac{1}{1 + \frac{1}{tg^2 \triangle_1}} \times \frac{1}{1 + tg^2 \triangle}$$

donde :

$$\cos B = \frac{M}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Da mesma maneira teremos para C :

$$\cos C = \frac{N}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Taes são os valores dos angulos A, B, C, formados com os eixos coordenados pelo eixo T'' dos momentos, que correspondem á somma de momentos *maximum*.

Substituindo estes valores na expressão (e) do momento e designando por K o momento *maximum*, temos :

$$(e') \qquad K^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

Substituindo o valor de K dado por esta relação nas expressões de

$$\cos A, \cos B \text{ e } \cos C,$$

resulta :

$$(e'') \qquad \cos A = \frac{L}{K}, \quad \cos B = \frac{M}{K}, \quad \cos C = \frac{N}{K}$$

Tomando, pois, sobre os tres eixos coordenados a partir de origem, comprimentos proporcionaes aos momentos

$$L, M \text{ e } N$$

e sobre essas tres rectas construindo um parallelepipedo, a relação (e') nos mostra que a diagonal desse parallelepi-

pedo representará a grandeza do momento *maximum*, e as relações (e'') nos mostram que essa diagonal K será o eixo T'' desse momento.

Representando por θ o angulo formado pelo eixo T' com um outro eixo T'', por

$$A',\ B'\ e\ C'$$

os angulos formados por este segundo eixo com os eixos coordenados, temos:

$$\cos\theta = \cos A' \cos A + \cos B' \cos B + \cos C' \cos C =$$
$$= \cos A' \frac{L}{K} + \cos B' \frac{M}{K} + \cos C' \frac{N}{K}$$

donde

$$K \cos\theta = L \cos A' + M \cos B' + N \cos C'$$

Representando a somma de momentos do segundo membro por E resulta:

$$\cos\theta = \frac{E}{K}$$

donde

$$E = K \cos\theta \qquad (c)$$

Variando a somma dos momentos relativamente ao novo eixo com o angulo θ, desta fórmula concluimos: que de todos os eixos que passam pelo mesmo ponto, o eixo de K é aquelle que corresponde a uma somma *maximum*; que a somma dos momentos é a mesma para todos os eixos que formam um mesmo angulo com o do momento *maximum*, constituindo todos os eixos para os quaes corresponde uma mesma somma de momentos uma superficie conica descripta em torno do eixo do *maximum* com o angulo commum; que a somma de momentos vai diminuindo á proporção que θ approxima-se de 90° e é nulla quando este angulo attinge este valor, isto é, para todos os eixos

que acham-se em um plano perpendicular ao eixo do *maximum*; que para todos os eixos parallelos ao eixo correspondente á somma *maximum* a somma dos momentos é a mesma, finalmente que todos os eixos parallelos ao eixo do *maximum* gozam da mesma propriedade, pois para todos elles $E = K$.

Imaginando-se pelo ponto a que referem-se T'' e K um outro eixo T_1 no mesmo plano dos dois e perpendicular ao eixo T'', o angulo que este novo eixo forma com K sendo complemento de θ, teremos para a somma dos momentos referidos a elle :

$$E_1 = K \operatorname{sen} \theta \qquad (c')$$

Elevando ao quadrado as equações *(c)* e *(c')* e somando-as membro a membro, temos:

$$K^2 = E^2 + E_1^2$$

O momento ou a somma dos momentos *maximum* é representado, pois, pela diagonal de um triangulo rectangulo cujos lados são proporcionaes aos momentos E e E_1.

Supponhamos agora a origem O do systema de coordenadas a que está referido o systema de forças, transportada para um outro ponto O_1 cujas coordenadas em relação aos eixos primitivos sejam:

$$\left(x', y', z' \right)$$

Para termos o momento de qualquer das forças relativamente a novos eixos basta substituirmos nas fórmulas *(A)*

$$x, y, z,$$

respectivamente por

$$\left(x - x' \right), \left(y - y' \right) e \left(z - z' \right)$$

o que nos dá:

$$P\left(y\cos\gamma - z\cos\beta\right) = l - P\left(z'\cos\beta - y'\cos\gamma\right)$$

$$P\left(z\cos\alpha - x\cos\gamma\right) = m - P\left(x'\cos\gamma - z'\cos\alpha\right)$$

$$P\left(x\cos\beta - y\cos\alpha\right) = n - P\left(y'\cos\alpha - x'\cos\beta\right)$$

ou:

$$l' = l - \left(Y_1 z' - Z_1 y'\right)$$

$$m' = m - \left(Z_1 x' - X_1 z'\right)$$

$$n' = n - \left(X_1 y' - Y_1 x'\right)$$

Designando por

$$L',\ M',\ N'$$

os momentos de todas as forças em relação aos novos eixos por

$$L_1\ M_1\ N_1$$

como anteriormente, os momentos dessas forças em relação aos eixos primitivos e por

$$X,\ Y\ e\ Z$$

a somma das componentes parallelas a estes eixos, teremos:

$$\text{(B)}\qquad \left\{\begin{aligned} L' &= L - \left(Yz' - Zy'\right)\\ M' &= M - \left(Zx' - Xz'\right)\\ N' &= N - \left(Xy' - Yx'\right)\end{aligned}\right.$$

Se as forças que constituem o systema considerado forem iguaes, parallelas e dirigidas em sentido contrario, sem serem directamente oppostas, as componentes

$$X,\ Y\ Z,$$

serão nullas, e estas formulas nos mostram que nesse caso os valores

$$L',\ M',\ e\ N'$$

são independentes das coordenadas

$$x',\ y'\ e\ z'$$

do ponto O_1, de modo que a grandeza do momento *maximum* e do seu eixo não variam com a posição deste ponto. Em todos os outros casos o momento *maximum* varia, e nós vamos procurar determinar quaes os pontos para os quaes elle é um *minimum*, isto é, vamos determinar o momento *minimum maximorum*.

A expressão do momento *maximum* para os novos eixos é:

$$K_1^2 = \left(L - Yz' + Zy'\right)^2 + \left(M - Zx' + Xz'\right)^2 + \left(N + Yx' - Xy'\right)^2$$

Differenciando em relação x', e igualando a zero o coefficiente differencial, temos:

$$-\left(M - Zx' + Xz'\right)Z + \left(N + Yx' - Xy'\right)Y = o$$

ou:

$$x'\left(Z^2 + Y^2\right) - ZM - ZXz' + YN - XYy' = o$$

Sendo:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

resulta

$$(1) \qquad R^2x' = X\left(Xx' + Yy' + Zz'\right) + MZ - NY$$

Differenciando em relação a

$$y' \text{ e } z',$$

teriamos de modo identico:

$$(2) \qquad R^2 y' = Y \left(Xx' + Yy' + Zz' \right) + NX + LZ$$

$$(3) \qquad R^2 z' = Z \left(Xx' + Yy' + Zz' \right) + LY - MX$$

Multiplicando a primeira por X, a segunda por Y e a terceira por Z e sommando-as, obtem-se uma equação identica, o que nos mostra que das tres equações (1) (2) e (3) as duas dellas são distinctas — Estas duas do 1º gráo em

$$x' \; y' \text{ e } z' \; .$$

representam as equações de uma recta que vem a ser o logar dos pontos

$$\left(x', y', z' \right)$$

ou dos centros dos momentos para os quaes o momento *maximum* é um *minimum*. A primeira equação nos dá:

$$Xx' + Yy' + Zz' = \frac{R^2 x' + NY - MZ}{X}$$

Substituindo este valor em (2):

$$R^2 y' = Y \left(\frac{R^2 x' + NY - MZ}{X} \right) + NX - LZ \, ;$$

expellindo o denominador e attendendo que:

$$R^2 - Z^2 = X^2 + Y^2$$

temos :

$$N - X y' + Y x' = \frac{Z \left(L X + M Y + N Z \right)}{R^2}$$

Eliminando a mesma quantidade entre a primeira e a terceira e entre esta e a segunda, obteriamos de modo identico :

$$M - Z x' + X z' = \frac{Y (L X + M Y + N Z)}{R^2} \qquad (a')$$

$$L - Y z' + Z y' = \frac{X (L X + M Y + N Z)}{R^2} \qquad (a'')$$

Estas tres equações representam as projecções, sobre os tres planos coordenados, da linha logar geometrico dos centros correspondentes ao momento *minimum maximorum*.

Elevando-as ao quadrado e sommando-as membro a membro, temos para expressão deste momento :

$$K_1^2 = \frac{(L X + M Y + N Z)^2}{R^2}$$

ou

$$K = \frac{L X + M Y + N Z}{R} \qquad (4)$$

Para determinar a sua direcção, designando por α', β' e γ' os angulos formados pelo seu eixo com os eixos coordenados temos :

$$\cos \alpha' = \frac{L'}{K_1}, \quad \cos \beta' = \frac{M'}{K_1}, \quad \cos \gamma' = \frac{N'}{K_1}$$

qualquer que seja o centro dos momentos.

Substituindo L' e K pelos seus valores (B) e (4), temos :

$$\cos \alpha' = \frac{L - Y z' + Z y'}{\dfrac{L X + M Y + N Z}{R}} = \frac{R (L - Y z' + Z y')}{L X + M Y + N Z}$$

A equação (a'') nos dá :

$$R (L - Y z' + Z y') = \frac{X (L X + M Y + N Z)}{R}$$

substituindo, temos :

$$\cos \alpha' = \frac{X}{R} ;$$

de modo identico achariamos :

$$\cos \beta' = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma' = \frac{Z}{R}$$

Estes valores nos mostram que os eixos de todos os momentos *minima* cujo valor commum é dado pela fórmula (4), são parallelos entre si e a direcção da resultante R.

Os resultados que acabamos de obter são, como vamos ver, os mesmos quando consideramos os momentos representados por uma área plana.

Supponhamos o momento de uma força P representado pela área de um triangulo tendo um dos vertices como centro dos momentos. Projectando este triangulo sobre um plano horisontal é sempre possivel tirarmos por um de seus vertices uma parallela ao plano de projecção, e esta linha decomporá o triangulo considerado em dous outros de base parallela ao plano de projecção. A questão de determinação da projecção de um triangulo qualquer sobre um plano fica assim referida á determinação da projecção de um triangulo cuja base é parallela ao plano de projecção.

Considerando, pois, o triangulo T nesta situação relativamente ao plano de projecção, baixando de seus vertices perpendiculares sobre este plano, tomando para base o lado parallelo ao plano e pelo ponto de intersecção da altura a do triangulo projectado com a sua base, tirando uma parallela á altura a' do triangulo projecção T'', o angulo formado por esta parallela com a altura a será igual ao angulo φ dos triangulos T e T''. Sendo a base de T parallela ao plano de projecção, esse lado é igual ao correspondente no triangulo T', de sorte que as áreas de T e T'' estão entre si como as alturas, isto é :

$$\frac{T''}{T} = \frac{a'}{a} = \frac{a \cos \varphi}{a}$$

donde :

$$T'' = T \cos \alpha$$

A área do triangulo projecta-se, pois, sobre um plano do smo modo que uma recta sobre outra.

Se a área é polygonal podemos decompol-a em differentes ngulos T, T', T'' etc., cujas projecções serão :

$$t = T \cos \varphi, \quad t' = T' \cos \varphi, \quad t'' = T'' \cos \varphi \text{ etc.}$$

quaes addicionadas nos dão :

$$t + t' + t'' + \ldots\ldots = (T + T' + T'' + \ldots\ldots) \cos \varphi$$

Representando por T a somma das projecções e por A área polygonal considerada temos :

$$P = A \cos \alpha.$$

Se a área for limitada por uma linha curva, inscreve-se-he um polygono ao qual poder-se-ha applicar o principio nterior. Designando por A_2 a sua projecção teremos :

$$A_2 = A_1 \cos \varphi$$

Podemos, pois, concluir de um modo geral que a projecção de uma área plana qualquer sobre um plano é igual essa área multiplicada pelo coseno do angulo por ella formado com o plano de projecção.

Consideremos a área dada A referida a tres eixos rectangulares, e sejam α, β e γ, os angulos por ella formados com planos coordenados, e l, m e n as suas projecções sobre tres planos; teremos :

$$l = A \cos \alpha, \quad m = A \cos \beta, \quad n = A \cos \gamma$$

Considerando um plano P que forme com o plano da rea um angulo φ e representando por l_1 a projecção da área sobre o plano P, teremos :

$$l_1 = A \cos \varphi.$$

Designando por α', β', γ', os angulos de P com os planos ordenados, temos :

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

Substituindo estes valores na expressão de l_1, resulta

$$l_1 = A \cos \alpha \cos \alpha' + A \cos \beta \cos \beta' + A \cos \gamma \cos \gamma'$$

substituindo

$$A \cos \alpha, \quad A \cos \beta \quad \text{e} \quad A \cos \gamma$$

pelos seus valores temos :

$$l_1 = l \cos \alpha' + m \cos \beta' + n \cos \gamma'$$

formula que nos permitte determinar a projecção da área sobre um plano qualquer uma vez conhecidas as suas projecções sobre os planos coordenados primitivos.

Consideremos um numero qualquer de áreas:

$$A_1, A_2, A_3 \ldots . A_n$$

em planos differentes e as suas projecções :

$$l_1, l_2, l_3 \ldots . l_n$$

sobre um plano que forme com os planos coordenados os angulos α, β e γ ; sejam

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \ldots . (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$$

os angulos que formam cada uma das áreas com os mesmos planos coordenados.

Temos para projecção de cada uma das áreas sobre o plano :

$$l_1 = A_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha + A_1 \cos \beta_1 \cos \beta + A_1 \cos \gamma_1 \cos \gamma$$

$$l_2 = A_2 \cos \alpha_2 \cos \alpha + A_2 \cos \beta_2 \cos \beta + A_2 \cos \gamma_2 \cos \gamma$$

$$l_3 = A_3 \cos \alpha_3 \cos \alpha + A_3 \cos \beta_3 \cos \beta + A_3 \cos \gamma_3 \cos \gamma$$

.....

$$l_n = A_n \cos \alpha_n \cos \alpha + A_n \cos \beta_n \cos \beta + A_n \cos \gamma_n \cos \gamma$$

Sommando estas equações membro a membro, temos:

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + \dots + A_n \cos \alpha_n) \cos \alpha + (A_1 \cos \beta_1 + A_2 \cos \beta_2 + \dots + A_n \cos \beta_n) \cos \beta + (A_1 \cos \gamma_1 + A_2 \cos \gamma_2 + \dots + A_n \cos \gamma_n) \cos \nu$$

equação que nos mostra que a somma das projecções das áreas sobre o plano considerado é igual á somma das projecções das mesmas áreas sobre cada um dos planos coordenados multiplicados respectivamente pelos cosenos dos angulos formados pelo plano de projecção com os planos coordenados.

Representando a somma do primeiro membro por P, e as do segundo respectivamente por

$$L, M \text{ e } N$$

temos

$$P = L \cos \alpha + M \cos \beta + N \cos \nu$$

Considerando um outro systema de eixos coordenados com a mesma origem e formando respectivamente com os eixos dos

$$x \; y \text{ e } z$$

os angulos

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$$

teremos para o valor de P sobre cada um dos novos planos:

$$\begin{aligned} P_1 &= L \cos \alpha_1 + M \cos \beta_1 + N \cos \nu_1 \\ P_2 &= L \cos \alpha_2 + M \cos \beta_2 + N \cos \nu_2 \qquad (1) \\ P_3 &= L \cos \alpha_3 + M \cos \beta_3 + N \cos \nu_3 \end{aligned}$$

Elevando estas equações ao quadrado e sommando-as membro a membro, temos :

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = L^2 (cos^2 \alpha_1 + cos^2 \alpha_2 + cos^2 \alpha_3) +$$
$$+ M^2 (cos^2 \beta_1 + cos^2 \beta_2 + cos^2 \beta_3) + N^2 (cos^2 \nu_1 + cos^2 \nu_2 +$$
$$+ cos^2 \nu_3) + 2 L M (cos \alpha_1 cos \beta_1 + cos \alpha_2 cos \beta_2 + cos \alpha_3 cos \beta_3) +$$
$$+ 2 L N (cos \alpha_1 cos \nu_1 + cos \alpha_2 cos \nu_2 + cos \alpha_3 cos \nu_3)$$
$$+ 2 M N (cos \beta_1 cos \nu_1 + cos \beta_2 cos \nu_2 + cos \beta_3 cos \nu_3)$$

Sendo

$$cos^2 \alpha_1 + cos^2 \alpha_2 + cos^2 \alpha_3 = 1 ,$$

e do mesmo modo para

$$\beta \text{ e } \nu$$

e sendo

$$cos \alpha_1 cos \beta_1 + cos \alpha_2 cos \beta_2 + cos \alpha_3 cos \beta_3 = 0$$

e de modo identico para os outros angulos, pois que os outros eixos são rectangulares temos:

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

Esta equação independente dos novos eixos nos mostra que a somma dos quadrados das projecções das áreas sobre tres planos rectangulares quaesquer é constante e independente da posição desses planos.

Resolvendo esta equação em relação a P_1 temos :

$$P_1 = \left[L^2 + M^2 + N^2 - (P_2^2 + P_3^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Quando

$$P_2 \text{ e } P_3$$

forem nullos, a somma P das projecções das áreas sobre um plano formando com os planos coordenados os angulos

$$\alpha_1 \ \beta \text{ e } \nu$$

erá um maximum e sua expressão que representaremos por K será :

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

Para determinarmos a posição deste plano denominado *plano maximum das areas*, basta determinar os angulos que elle fórma com os planos coordenados.

Multiplicando respectivamente as equações (1) por

$$\cos \alpha_1 \ , \ \cos \alpha_2 \ , \ \cos \alpha_3 \ ,$$

e sommando-as membro a membro, temos :

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 = L \left(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \right.$$
$$\left. + \cos_2 \alpha_3 \right) + M \left(\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \right) +$$
$$+ N \left(\cos \alpha_1 \cos \nu_1 + \cos \alpha_2 \cos \nu^2 + \cos \alpha_3 \cos \nu_3 \right)$$

Sendo

$$P_2 = 0, \ P_3 = 0 \text{ e } P_1 = K$$

temos

$$L = K \cos \alpha_1,$$

donde

$$\cos \alpha_1 = \frac{L}{K}$$

Procedendo do mesmo modo com

$$\cos \beta_1 \ , \ \cos \beta_2 \ , \ \cos \beta_3 \ , \ \cos \nu_1 \ , \ \cos \nu_2 \ , \ \cos \nu_3$$

achariamos :

$$\cos \beta_1 = \frac{M}{K} \ , \ \cos \nu_1 = \frac{N}{K}$$

equações que determinam a posição do plano maximum.

Considerando um plano qualquer fazendo com os planos coordenados os angulos

$$\varphi_1 \ , \ \varphi_2 \text{ e } \varphi_3 \ ,$$

representando por C a somma das projecções das áreas sobre esse plano, temos:

$$C = L \cos \varphi_1 \ . + M \cos \varphi_2 + N \cos \varphi_3$$

Substituindo

$$L,\ M \text{ e } N$$

pelos seus valores deduzidos das equações anteriores, temos.

$$C = K\ (\cos \varphi_1 \cos \alpha_1 + \cos \varphi_2 \cos \beta_1 + \cos \varphi_3 \cos \nu_1)$$

Representando por θ o angulo formado pelo novo plano com o plano maximum das áreas, temos:

$$C = K \cos \theta$$

Esta equação nos mostra que a somma das projecções das áreas é constante para todos os planos parallelos ao plano maximum ; que a proporção que θ approxima-se de 90° a somma das áreas vae diminuindo e é nulla para todos os planos perpendiculares ao plano maximum das áreas.

Como vemos, considerando-se os momentos representados por áreas de triangulos ou como o producto de cada força pela menor distancia de um ponto á sua direcção os resultados são os mesmos.

A theoria dos momentos nos fornece um meio de determinar em grandeza, direcção e posição a resultante de um numero qualquer de forças situadas de um modo qualquer sobre um plano, independentemente do ponto de concurso.

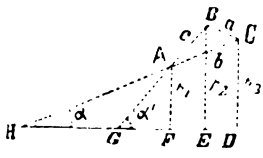


Fig. 39

Determinando os momentos das forças consideradas relativamente a tres pontos do plano teremos :

$$Rr_1 = \Sigma\ Pp_1 \quad Rr_2 = \Sigma\ Pp_2 \quad Rr_3 = \Sigma\ Pp_3,$$

donde :

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{\Sigma\ Pp_1}{\Sigma\ Pp_3}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\Sigma\ Pp_1}{\Sigma\ Pp_2}$$

Sejam

$$A,\ B \text{ e } C$$

os tres pontos do plano (fig. 39) ; suppondo DH a direcção da resultante teremos

$$r_1 = AF \quad r_2 = BE \text{ e } r_3 = CD$$

Prolongando as linhas

$$BA \text{ e } AC$$

até encontrarem a direcção da resultante, teremos nos triangulos :

$$C\,H\,D \text{ e } A\,H\,F,$$

$$r_2 = H\,C \text{ sen } C\,H\,D = H\,C \text{ sen } \alpha = (A\,H + A\,C) \text{ sen } \alpha =$$

$$= (A\,H + b) \text{ sen } \alpha, \; r_1 = A\,H \text{ sen } \alpha$$

portanto :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{A\,H}{A\,H + b},$$

ou:

$$\frac{A\,H}{A\,H + b} = \frac{\Sigma\, Pp_1}{\Sigma\, Pp_2}$$

donde :

$$A\,H\,\Sigma\, Pp_2 = (A\,H + b)\,\Sigma\, Pp_1 = b\,\Sigma\, Pp_1 + A\,H\,\Sigma\, Pp_1$$

donde :

$$A\,H = \frac{b\,\Sigma\, Pp_1}{\Sigma\, Pp_2 - \Sigma\, Pp_1}$$

Os triangulos :

$$A\,G\,F \text{ e } B\,G\,E$$

nos dão:

$$r_1 = A\,G \text{ sen } A\,G\,F = A\,G \text{ sen } \alpha', \; r_2 = B\,G \text{ sen } \alpha' =$$

$$= (A\,B + A\,G) \text{ sen } \alpha' = (c + A\,G) \text{ sen } \alpha'$$

donde

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{A\,G}{c + A\,G}, \quad \frac{A\,G}{c + A\,G} = \frac{\Sigma\, Pp_1}{\Sigma\, Pp_2}, \; (c + A\,G)\,\Sigma\, Pp_1 =$$

$$= A\,G\,\Sigma\, Pp_2$$

donde :

$$A\,G = \frac{c\,\Sigma\, Pp_1}{\Sigma\, Pp_2 - \Sigma\, Pp_1} \qquad (2)$$

O triangulo

$$A\ H\ G$$

nos dá:

$$\frac{A\ H}{A\ G} = \frac{sen\ (A + \alpha)}{sen\ \alpha}$$

$$A\ H\ sen\ \alpha = A\ G\ sen\ (A + \alpha) = A\ G\ sen\ A\ cos\ \alpha + A\ G\ cos\ A\ sen\ \alpha\ ;$$

dividindo ambos os membros por

$$cos\ \alpha$$

temos:

$$A\ H\ tg\ \alpha = A\ G\ sen\ A + A\ G\ cos\ A\ tg\ \alpha$$

donde:

$$tg\ \alpha = \frac{A\ G\ sen\ A}{A\ H - A\ G\ cos\ A}$$

Sendo

$$r_1 = A\ H\ sen\ \alpha,$$

substituindo

$$A\ H$$

pelo seu valor, e sendo α conhecido pela expressão que acabamos de determinar, temos :

$$r_1 = \frac{b\ \Sigma\ Pp_1}{\Sigma\ Pp_3 - \Sigma\ Pp_1}\ sen\ \alpha$$

Conhecido r_1 sendo

$$R = \frac{\Sigma\ Pp_1}{r_1}\ ,$$

substituindo, temos :

$$R = \frac{\Sigma\ Pp_1}{\dfrac{b\ \Sigma\ Pp_1}{\Sigma\ Pp_3 - \Sigma\ Pp_1}\ sen\ \alpha} = \frac{\Sigma\ Pp_3 - \Sigma\ Pp_1}{b\ sen\ \alpha}$$

equação que nos dá o valor da resultante.

Conhecidas as tres quantidades

$$R,\ r_1\ \text{e}\ \alpha$$

tira-se pelo ponto A uma recta formando com o lado AC um angulo α, por esse mesmo ponto tira-se uma perpendicular AF a essa recta, toma-se a partir de A uma grandeza

$$A\ F = r_1;$$

pelo ponto F tira-se uma perpendicular a linha AF, e tem-se a posição da resultante, ficando apenas inteiramente arbitrario o seu ponto de applicação que póde ser qualquer um da sua direcção.

Si tivermos

$$\alpha = 90^0$$

o valor de R será :

$$R = \frac{\Sigma\ Pp_2 - \Sigma\ Pp_1}{b}$$

Si $\alpha = o$ a resultante é parallela ao lado AC, AH é infinito e o valor da resultante é dado por meio de AG.

No triangulo

$$A\ G\ H$$

temos

$$\wedge\ G = \wedge\ A + \alpha$$

Sendo

$$sen\ \alpha = o$$

temos :

$$\wedge\ G = \wedge\ A,$$

portanto :

$$r_1 = A\ G\ sen\ A = \frac{c\ \Sigma\ Pp_1}{\Sigma\ Pp_2 - \Sigma\ Pp_1}\ sen\ A$$

Substituindo este valor na expressão da resultante, temos:

$$R = \frac{\Sigma Pp_2 - \Sigma Pp_1}{c \operatorname{sen} A}$$

Si além de

$$\alpha = o$$

tivermos

$$A = 90,$$

a resultante será:

$$R = \frac{\Sigma Pp_2 - \Sigma Pp_1}{o}$$

A direcção e a intensidade da resultante não modificando-se com a supposição da convergencia de todas as forças em um ponto, simplifica-se esta solução referindo-as a dous eixos coordenados rectangulares o que nos fornece duas equações por meio das quaes determina-se a intensidade e direcção da resultante, e recorre-se á theoria dos momentos apenas para obter a terceira equação que determina a sua situação.

Neste caso basta-nos, pois, calcular os momentos relativamente a um ponto e esta equação não é mais que a traducção algebrica da condição de convergencia.

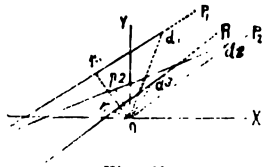


Fig. 40

Supponhamos as tres forças

$$R,\ P_1 \text{ e } P_2$$

applicadas respectivamente aos pontos

$$d_3,\ d_1 \text{ e } d_2 \qquad \text{(fig. 40)}$$

Baixando do ponto O sobre as suas direcções as perpendiculares

$$r,\ p_1 \text{ e } p_2$$

e unindo os pontos de applicação á origem, denominando respectivamente por

$$0,'\ 0'' \text{ e } 0'''$$

os angulos

$$d_1\ o\ X,\ d_2\ o\ X \text{ e } d_3\ o\ X,$$

e por

$$\alpha',\ \alpha''\ \text{ e } \alpha$$

os angulos que formam as forças com o eixo dos x, temos:

$$\measuredangle\, d_1 = \theta' - \alpha' \quad p_1 = o\,d_1 \times sen \measuredangle\, d_1, \quad p_1 = o\,d_1\, sen\,(\theta' - \alpha') \quad (1)$$

$$\measuredangle\, d_2 = \theta'' - \alpha'' \quad p_2 = o\,d_2 \times sen \measuredangle\, d_2 \quad p_2 = o\,d_2\, sen\,(\theta'' - \alpha'')$$

portanto:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{od_1}{od_2}\,,\ \frac{sen\,(\theta' - \alpha')}{sen\,(\theta'' - \alpha'')}$$

Para que as duas forças P_1 e P_2 convirjam em um ponto, basta que as hypothenusas $d\ o_1$ e $d\ o_2$ confundam-se em uma unica, isto é, basta que

$$o\,d_1 = o\,d_2 \text{ e } \theta' = \theta''$$

Representando por θ_1 o valor commum de θ' e θ'' teremos para equação de condição da convergencia:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{sen\,(\theta_1 - \alpha')}{sen\,(\theta_1 - \alpha'')}\,,$$

$$r = o\,d_3\, sen \measuredangle\, d_3 = o\,d_3\, sen\,(\theta''' - \alpha)$$

Dividindo membro a membro a equação (1) e esta, temos:

$$\frac{p_1}{r} = \frac{o\,d_1}{o\,d_3}\,,\ \frac{sen\,(\theta' - \alpha')}{sen\,(\theta''' - \alpha)}$$

Para que as duas forças P e R convirjam em um ponto basta que tenhamos:

$$o\,d_1 = o\,d_3,\ \theta' = \theta''' = \theta_2$$

a equação de convergencia é pois:

$$\frac{p_1}{r} = \frac{sen\,(\theta_2 - \alpha'}{sen\,(\theta_2 - \alpha)}$$

Para a concurrencia das tres, isto é, para que os pontos de convergencia binaria reduzam-se a um unico basta que tenhamos:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

As equações de condição de convergencia das tres forças são pois:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{sen\,(\theta - \alpha')}{sen\,(\theta - \alpha'')} \qquad \frac{p_1}{r} = \frac{sen\,(\theta - \alpha')}{sen\,(\theta - \alpha)} \tag{2}$$

Referidas as tres forças convergentes em um ponto a dois eixos coordenados, e suppondo que R seja a resultante temos:

$$R' \cos \alpha = P' \cos \alpha' + P_2 \cos \alpha'', \; R \, sen\, \alpha = P_1 \, sen\, \alpha' + P_2 \, sen\, \alpha'' \tag{3}$$

Multiplicando a primeira por $sen\,\theta$ e a segunda por $\cos\theta$ temos:

$$R \, sen\, \theta \cos \alpha = P_1 \, sen\, \theta \cos \alpha' + P_2 \, sen\, \theta \cos \alpha''$$

$$R \cos \theta \, sen\, \alpha = P_1 \cos \theta \, sen\, \alpha' + P_2 \cos \theta \, sen\, \alpha''$$

subtrahindo membro a membro a segunda da primeira, temos:

$$R\,(sen\,\theta \cos \alpha - \cos \theta \, sen\, \alpha) = P_1\,(sen\,\theta \cos \alpha' - \cos \theta \, sen\, \alpha') +$$
$$+ P_2\,(sen\,\theta \cos \alpha'' - \cos \theta \, sen\, \alpha''$$

ou

$$R \, sen\,(\theta - \alpha) = P_1 \, sen\,(\theta - \alpha') + P_2 \, sen\,(\theta - \alpha'')$$

As equações (2) nos dão:

$$sen\,(\theta - \alpha'') = \frac{p_2}{p_1} \, sen\,(\theta - \alpha'), \; sen\,(\theta - \alpha) =$$
$$= \frac{r}{p_1} \, sen\,(\theta - \alpha') \, .$$

substituindo, temos:

$$R \frac{r}{p_1} sen\,(\theta - \alpha') = P_1\, sen\,(\theta - \alpha') + P_2 \frac{p_2}{p_1} sen\,(\theta - \alpha')$$

donde:

$$R\,r = P_1\,p_1 + P_2\,p_2$$

equação que póde substituir as equações (2).

Esta equação dos momentos das forças referidas ao ponto *o*, unida ás equações (3) nos fornecem todos os elementos necessarios para determinar a resultante em grandeza, direcção e posição.

Representando respectivamente os segundos membros dessas equações por X, Y e ω, temos:

$$R\cos\alpha = X,\quad R\,sen\,\alpha = Y\,,\quad R\,r = \omega$$

As duas primeiras nos dão para intensidade e direcção da resultante.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad tg\,\alpha = \frac{Y}{X},$$

e a terceira nos dá para determinar a sua situação:

$$r = \frac{\omega}{R}$$

Fica assim a resultante completamente determinada, restando apenas indeterminado o seu ponto de applicação, o que é natural pois que esta força póde ser considerada applicada em qualquer dos pontos de sua direcção sem que as condições do problema mecanico sejam por isso modificadas.

Para obter a equação da linha que representa a resultante basta substituir na terceira equação, r em formação das coordenadas do ponto de applicação, isto é, por $(y\cos\alpha - x\,sen\,\alpha)$ e depois $sen\,\alpha$ e $\cos\alpha$ pelos seus valores fornecidos pelas duas primeiras.

Sendo:

$$p_1 = y_1 \cos \alpha' - x_1 \operatorname{sen} \alpha', \quad p_2 = y_2 \cos \alpha'' - x_2 \operatorname{sen} \alpha''$$

e

$$\omega = P_1 \left(y_1 \cos \alpha' - x_1 \operatorname{sen} \alpha'\right) + P_2 \left(y_2 \cos \alpha'' - x_2 \operatorname{sen} \alpha''\right) =$$

$$= \left(P_1 y_1 + P_2 y_2\right) \cos \alpha' - \left(P_1 x_1 + P_2 x_2\right) \operatorname{sen} \alpha''$$

e

$$\alpha = \alpha' = \alpha''$$

$$X = \left(P_1 + P_2\right) \cos \alpha \ ;$$

resulta:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 - \left(P_1 x_1 + P_2 x_2\right) \operatorname{tg} \alpha}{P_1 + P_2}.$$

No caso de um numero qualquer de forças teriamos:

$$R = \Sigma P$$

e

$$r = \frac{\Sigma P p}{\Sigma P} \ ;$$

e para equação da resultante:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{\Sigma P y' - \operatorname{tg} \alpha \, \Sigma P x'}{\Sigma P}.$$

Fazendo nesta equação:

$$x = \frac{\Sigma P x'}{\Sigma P},$$

o ponto da resultante correspondente a esta abcissa terá para ordenada:

$$y = \frac{\Sigma P y'}{\Sigma P} \ .$$

Sendo estas coordenadas independentes de α, o ponto por ellas definido é um ponto commum a todas as direcções que póde tomar a resultante, quando as componentes, mantendo as suas relações de grandeza e conservando o parallelismo e pontos de applicação, formam todos os angulos possiveis com uma linha fixa traçada no seu plano; esse ponto é o centro das forças parallelas.

Consideremos o caso geral de um numero qualquer de forças parallelas situadas em planos differentes.

Designando por R a resultante temos:

$$R = \Sigma (P)$$

Vejamos como se obtem a equação desta resultante. Consideremos duas das forças P_1 e P_2. Determinando no plano dessas forças a sua resultante teremos:

$$R_1 = P_1 + P_2 \qquad (1)$$

Tomando os momentos destas forças em relação a um ponto m qualquer do seu plano, resulta:

$$R_1 r = P_1 p_1 + P_2 p_2 \qquad (2)$$

Prolongando as tres forças R, P_1 e P_3, referidas como todas as outras a tres planos rectangulares, até encontrarem o plano dos xy, e designando respectivamente por

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2)$$

as coordenadas dos seus traços nesse plano, teremos:

$$\frac{p_2 - p_1}{r - p_1} = \frac{a_2 - a_1}{a - a_1};$$

$$\frac{p_2 - p_1}{r - p_1} = \frac{b_2 - b_1}{b - b_1}$$

Como o ponto m é inteiramente arbitrario podemos suppol-o situado sobre a direcção de P_1 e nesta hypothese temos : $p_1 = o$, d'onde :

$$\frac{p_2}{r} = \frac{a_2 - a_1}{a - a_1} \text{ e } \frac{p_2}{r} = \frac{b_2 - b_1}{b - b_1}$$

Na mesma hypothese a equação dos momentos nos dá :

$$R_1 r = P_2 p_2$$

donde resulta :

$$R_1 (a - a_1) = P_2 (a_2 - a_1)$$

$$R_1 (b - b_1) = P_2 (b_2 - b_1)$$

ou, attendendo á equação (1):

$$R_1 a - (P_1 + P_2) a_1 = P_2 a_2 - P_2 a_1$$

$$R_1 b - (P_1 + P_2) b_1 = P_2 b_2 - P_2 b_1$$

donde :

$$R_1 a = P_1 a_1 + P_2 a_2$$

$$R_1 b = P_1 b_1 - P_2 b_2$$

Considerando uma terceira força P_3 não situada no plano de P_1 e P_2, combinando, como acabamos de fazer, com a resultante R_1 de P_1 e P_2, teriamos :

$$R_2 a' = R_1 a + P_3 a_3$$

$$R_2 b' = R_1 b + P_3 b_3$$

ou :

$$R_2 a' = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3$$

$$R_2 b' = P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b$$

Fazendo successivamente estas combinações teriamos, finalmente, para todas as forças as equações :

$$(n)\begin{cases} R = \Sigma P \\ Ra = \Sigma (Pa_1) \\ Rb = \Sigma (Pb_1) \end{cases}$$

Determinemos agora as expressões de a, b, a_1 b_1 etc.

Sejam :

$$x = mz + p, \quad y = m'z + p'$$

as equações de qualquer das rectas parallelas que representam as forças consideradas. Fazendo $z = o$, resulta para coordenadas do traço da recta sobre o plano xy :

$$x = p, \quad y = p'$$

ou, conforme a supposição anterior :

$$p = a, \quad p' = b$$

Donde :

$$a = x - mz, \quad b = y - m'z$$

Tirando pela origem uma direcção parallela á das forças e sobre ella tomando uma parte igual a l, designando por

$$\alpha, \beta \text{ e } \nu$$

os angulos que a direcção das forças fórma respectivamente com os eixos dos

$$x, y \text{ e } z,$$

teremos para coordenadas do ponto extremo da recta l :

$$x = l \cos \alpha, \quad y = l \cos \beta, \quad z = l \cos \nu$$

Substituindo estes valores nas equações de l :

$$x = mz, \quad y = m'z$$

resulta :

$$m = \frac{\cos \alpha}{\cos \nu}, \quad m' = \frac{\cos \beta}{\cos \nu}$$

Donde:

$$a = x - \frac{\cos \alpha}{\cos \nu} z, \quad b = y - \frac{\cos \beta}{\cos \nu} z$$

De modo analogo determinariamos para as outras forças:

$$a_1 = x' - \frac{\cos \alpha}{\cos \nu} z' \quad b_1 = y' - \frac{\cos \beta}{\cos \nu} z'$$

$$a_2 = x'' - \frac{\cos \alpha}{\cos \nu} z'', \quad b_2 = y'' - \frac{\cos \beta}{\cos \nu} z''$$

etc. *etc.*

sendo

$$\alpha, \beta \text{ e } \nu$$

os angulos communs que formam as forças parallelas com cada um dos eixos.

Substituindo estes valores nas equações *(n)* temos:

$$R \left(x - z \frac{\cos \alpha}{\cos \nu} \right) = \Sigma P \left(x' - \frac{z' \cos \alpha}{\cos \nu} \right)$$

ou:

$$R x - R z \frac{\cos \alpha}{\cos \nu} = \Sigma \left(P x' - P z' \frac{\cos \alpha}{\cos \nu} \right) = \Sigma P x' - \frac{\cos \alpha}{\cos \nu} \Sigma P z',$$

donde, em virtude da 1ª equação *(n)*:

$$z = \frac{\cos \nu}{\cos \alpha} x + \frac{\Sigma P z' - \frac{\cos \nu}{\cos \alpha} \Sigma P x'}{\Sigma P}$$

De modo semelhante a substituição de b e b' na segunda equação daria:

$$z = \frac{\cos \nu}{\cos \beta} y + \frac{\Sigma P z' - \frac{\cos \nu}{\cos \beta} \Sigma P y'}{\Sigma P}$$

igualando estes dous valores temos :

$$y = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} x + \frac{\Sigma P y' - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \Sigma P x'}{\Sigma P}$$

que são as tres equações da resultante uma das quaes é consequencia das outras duas.

Sendo as coordenadas do centro de forças parallelas independentes dos angulos

$$\alpha \ \beta \ \text{e} \ \nu$$

para determinarmos essas coordenadas basta obter as equações que traduzem esta condição igualando a zero nas equações da resultante a somma algebrica dos termos affectos das formações desses angulos.

As duas primeiras equações nos dão :

$$\frac{\cos \nu}{\cos \alpha} x - \frac{\cos \nu}{\cos \alpha} \cdot \frac{\Sigma P x'}{\Sigma P} = o, \quad \frac{\cos \nu}{\cos \beta} y - \frac{\cos \nu}{\cos \beta} \cdot \frac{\Sigma P y'}{\Sigma P} = o$$

donde

$$x = \frac{\Sigma P x'}{\Sigma P}, \quad y = \frac{\Sigma P y'}{\Sigma P}$$

Este valor de x substituido na primeira equação nos dá :

$$z = \frac{\Sigma P z'}{\Sigma P}$$

Taes são as coordenadas do centro de forças parallelas do qual nos occuparemos especialmente, quando tratarmos do estudo dos centros de gravidade.

THEORIA DOS CONJUGADOS

I

Denomina-se *conjugado* o systema constituido por duas forças parallelas, iguaes e actuando em sentidos contrarios. A mais curta distancia entre essas duas forças ou a perpendicular commum ás duas denomina-se *braço* do conjugado, e o producto de uma das forças pelo braço é o *momento* do conjugado. O momento póde, pois, ser representado geometricamente pela área de um parallelogrammo tendo uma das forças para base e para altura o braço.

O signal do conjugado determina-se pela mesma convenção que regula o dos momentos das forças, isto é, são positivos os conjugados que tendem a imprimir ao seu braço, considerado movel em torno do seu centro, uma rotação da esquerda para a direita e negativos no caso contrario.

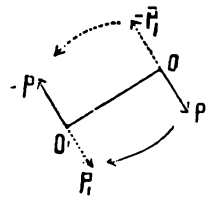


Fig. 1

Assim o conjugado, fig. (41)

$$(P_1 - P)$$

é positivo, e o conjugado

$$(P_1, - P_1)$$

é negativo.

Um systema de duas forças assim constituido, como vimos, não póde ser reduzido a uma força unica, e isto manifesta-se na determinação da resultante, que apresenta-se como uma força nulla applicada a um ponto situado no infinito.

Considerando o conjugado

$$(P_1 - P)$$

se tomarmos os momentos das forças que o contituem relativamente a um ponto qualquer o do seu plano, fig. (42), teremos:

$$-P \times ao \quad \text{e} \quad P \times bo,$$

e para somma algebrica:

$$P \times bo - P \times ao = P\ (bo - ao) = -P \times ab$$

Si o ponto considerado estivesse no espaço comprehendido entre as direcções das duas forças, em o', por exemplo, teriamos:

$$-P \times o'a + P \times -o'b = -P\ (o'a + o'b) = -P \times ab$$

Estes resultados nos mostram que a somma algebrica os momentos das forças de um conjugado, relativamente a um ponto qualquer do seu plano, ou relativamente a um eixo normal a esse plano é constante e igual em valor absoluto ao momento do conjugado.

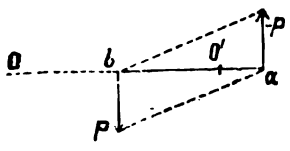


Fig. 42

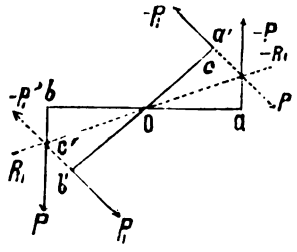


Fig. 43

1.º *O effeito de um conjugado não se altera qualquer que seja a orientação que se lhe dê em torno do centro do seu braço.*

Consideremos o conjugado

$$(P, -P),$$

(fig. 43) e supponhamos que elle gyrando em torno do centro do seu braço toma a posição

$$(P_1, -P_1).$$

Suppondo applicada em a' e b' as forças

$$+ P' \text{ e } - P'$$

iguaes a P_1 e contrarias, o systema constituido pelas se forças

$$P, P' \text{ e } P_1$$

é equivalente ao conjugado primitivo, pois que as forças

$$P' \text{ e } P_1$$

destroem-se duas a duas.

Considerando os pontos de applicação das forças

$$P' \text{ e } P$$

transportados para os pontos de encontro c e c' de su direcções, e compondo essas forças em cada um dess pontos, teremos respectivamente as resultantes

$$R_1 \text{ e } - R_1$$

iguaes e directamente oppostas, passando pelo ponto o, por conseguinte neutralisando-se.

Deste modo o systema é substituido por um outro equ valente constituido pelo conjugado

$$(P_1, - P_1)$$

e pelas forças

$$R_1 \text{ e } - R_1$$

que se destroem, ficando assim o conjugado primitivo subs tuido pelo systema equivalente representado pelo mesm conjugado na nova posição

$$(P_1, - P_1).$$

2.° *A acção de um conjugado não se altera quando se o desloca parallelamente a si mesmo no seu plano ou para um plano parallelo ao seu.*

Supponhamos o conjugado

$$\left(P, -P\right) \qquad \text{fig. (44)}$$

transportado parallelamente á posição

$$\left(P_1, -P_1\right).$$

Considerando applicadas aos pontos

$$a' \quad \text{e} \quad b'$$

as forças

$$P' \quad \text{e} \quad -P'$$

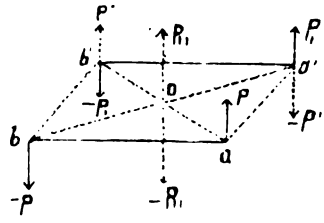


Fig. 44

iguaes e contrarias as forças P_1, o systema constituido por estas seis forças é equivalente ao conjugado primitivo, pois que as forças applicadas em

$$a' \quad \text{e} \quad b'$$

destroem-se.

Compondo as forças:

$$\left(-P \quad \text{e} \quad -P'\right)$$

teremos uma resultante: $-R_1$ applicada ao meio da linha $a'\,b$; compondo as forças P e P' obteremos uma resultante R_1, applicada ao meio da linha $b'\,a$, e sendo estas duas forças iguaes, contrarias, actuando segundo a mesma direcção, destroem-se e o conjugado primitivo

$$\left(P, -P\right)$$

fica substituido pelo systema equivalente constituido pelo conjugado

$$\left(P_1, -P_1\right)$$

4.º *Um conjugado cujas forças sejam representadas pelos dous lados oppostos de um parallelogrammo póde ser substituido por um outro representado pelos outros dous lados comtanto que os seus signaes sejam os mesmos.*

Consideremos o parallelogrammo *abcd*, e sejam

$$b\,a \quad \text{e} \quad d\,c$$

as forças

$$P, \; - P$$

constituintes do conjugado, (fig. 46).

Suppondo applicadas em

$$a \quad \text{e} \quad d, \; b \quad \text{e} \quad c$$

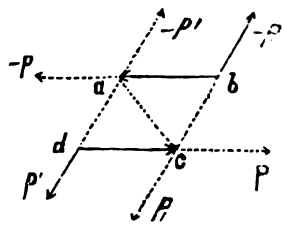


Fig. 46

duas forças contrarias:

$$P_1, \; - P_1, \; P', \; - P'$$

iguaes aos lados

$$a\,d = b\,c$$

e actuando segundo a direcção desses lados, fica o conjugado considerado substituido por um systema de seis forças, quatro das quaes destroem-se duas a duas.

Determinando a resultante das forças

$$- P, \; - P'$$

obteremos uma força R_1 actuando segundo a diagonal ac; determinando a resultante de

$$P \quad \text{e} \quad P_1$$

obteremos uma força R_2 actuando segundo a mesma diagonal em sentido contrario a R_1, e, sendo essas duas forças iguaes, destroem-se.

O conjugado considerado fica, pois, substituido pelo systema equivalente constituido pelo conjugado

$$\left(P', -P_1\right)$$

ou

$$\left(P', -P'\right)$$

pois que

$$P' = P_1.$$

5.º *Um conjugado póde ser substituido no seu plano por tres forças representadas pelos tres lados de um triangulo qualquer cuja área seja igual á metade do seu momento, comtanto que as tres forças tendam a imprimir ao plano do triangulo uma rotação no mesmo sentido que a do conjugado.*

Consideremos um triangulo abc constituido pelas tres forças:

$$P_1 = ab,\ P_2 = ac,\ P_3 = cb,$$ fig. (47)

Prolongando o lado $a\ b$ e tomando

$$b\ d = P_1,$$

construindo o parallelogrammo $b\ c\ e\ d$, e compondo as duas forças

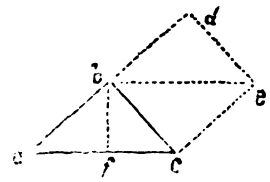


Fig. 47

$$ab = P_1 \quad \text{e} \quad bc = P_2$$

em uma unica $b\ e$, fica o systema de tres forças substituido por um outro equivalente constituido pelo conjugado formado pelas duas forças

$$b\ e = P_2 \quad \text{o} \quad c\ a = P_2,$$

cujo momento é igual a:

$$P_2 \times b\ f = a\ c \times b\ f$$

ou equivalente ao dobro do área do triangulo considerado.

Um conjugado fica completamente definido desde que são dados o seu momento, um plano parallelo áquelle em que actúa e o seu signal.

Estes elementos podem ser geometricamente representados por uma recta perpendicular ao plano do conjugado, e sobre cuja direcção se tenha tomado uma grandeza proporcional ao seu momento.

O signal é definido pelo sentido da recta, que deve ser tal, relativamente ao plano do conjugado, que um observador collocado sobre este e com ella prolongado veja a rotação que tende a produzir-se realisar-se da esquerda para a direita ou no sentido positivo.

Esta recta que denomina-se eixo do conjugado não tem uma posição definida, pois, como vimos, um conjugado póde deslocar-se parallelamente a si mesmo sem que a sua acção seja modificada.

Assim representados, os conjugados ficam sujeitos a uma composição e decomposição identicas á composição e decomposição das forças.

Supponhamos um numero qualquer n de conjugados existentes no mesmo plano ou em planos parallelos e cujos momentos sejam:

$$M_1\ p_1,\ M_2\ p_2,\ M_3\ p_3, \ldots\ M_n\ p_n$$

Transportando-os para um mesmo plano e modificando-os de modo que os seus braços tenham todos um valor commum p, teremos substituido os n conjugados considerados por n outros equivalentes cujas forças serão respectivamente:

$$\frac{M_1\ p_1}{p},\ \frac{M_2\ p_2}{p}, \ldots,\ \frac{M_n\ p_n}{p}$$

Dispondo estes conjugados de modo que todos os seus braços venham a coincidir em uma mesma recta p, teremos reunido todas as forças que os constituem em dous grupos de

forças actuando segundo uma mesma direcção, no mesmo e em differentes sentidos e applicadas a cada um dos extremos do braço commum p.

Cada um destes dous grupos reduz-se pela somma algebrica dos seus elementos componentes a uma unica força, e todos os conjugados considerados ficam substituidos por um unico equivalente tendo o mesmo braço p, e para valor de cada uma de suas forças:

$$\frac{M_1\ p_1}{p} + \frac{M_2\ p_2}{p} + \ldots + \frac{M_n\ p_n}{p}$$

e, portanto, para momento:

$$p\left(\frac{M_1\ p_1}{p} + \frac{M_2\ p_2}{p} + \ldots + \frac{M_n\ p_n}{p}\right) =$$

$$= M_1\ p_1 + M_2\ p_2 + \ldots + M_n\ p_n$$

O conjugado resultante de um systema de conjugados existentes no mesmo plano ou em planos parallelos é, pois, parallelo aos conjugados componentes e tem um momento igual á somma algebrica dos momentos dos conjugados componentes.

Consideremos dous conjugados:

$$\left(P_{,1} - P_1\right) \quad \text{e} \quad \left(P_{2,} - P_2\right)$$

existentes em dous planos quaesquer (Fig. 48).

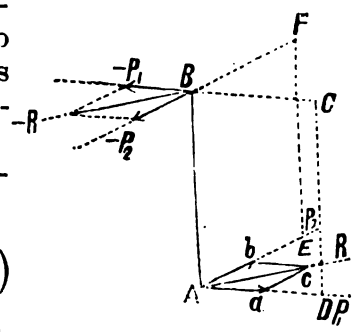


Fig. 48

Modificando-os convenientemente de modo que fiquem com um mesmo braço, e transportando-os parallelamente a si mesmo, em seus respectivos planos, de sorte que os seus braços iguaes venham a coincidir na linha AB de

intersecção dos dois planos, teremos applicadas no ponto A as forças

$$Aa = P_1 \quad e \quad Ab = P_2$$

perpendicularmente á aresta AB, e no ponto B as forças

$$-P_1 \quad e \quad -P_2$$

dispostas do mesmo modo.

Compondo

$$P_1 \text{ e } P_2 \quad , \quad -P_1 \text{ e } -P_2$$

obteremos applicadas em A e B duas forças resultantes R e $-R$, iguaes, parallelas e em sentidos contrarios, que serão as forças constituintes do conjugado resultante.

Representando por θ o angulo DAE dos planos dos dous conjugados componentes ou o angulo formado pelas perpendiculares a esses dois planos, por M_1 e M_2 os momentos dos conjugados componentes e por p o valor do braço commum AB, temos para valor das forças dos conjugados componentes :

$$P_1 = \frac{M_1}{p} \quad , \quad P_2 = \frac{M_2}{p}$$

O parallelogrammo $Aa\,cb$ nos dá :

$$R = \sqrt{\frac{M_1^2 + M_2^2 + 2\,M_1\,M_2 \cos\theta}{p^2}}$$

Determinado este valor da força do conjugado resultante, temos para expressão do seu momento :

$$Rp = M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2\,M_1\,M_2 \cos\theta}$$

A posição do plano do conjugado resultante é determinada pelo angulo que elle forma com o de um dos conjugados componentes.

No triangulo aAc, por exemplo, temos :

$$\frac{P_2}{R} = \frac{sen\ aAc}{sen\ Aac} = \frac{sen\ aAc}{sen\ 0}$$

ou:

$$\frac{\frac{M_2}{p}}{\frac{M}{p}} = \frac{sen\ aAc}{sen\ 0},$$

donde:

$$sen\ aAc = \frac{\frac{M_2}{p}}{\frac{M}{p}}\ sen\ 0 = \frac{M_2}{M}\ sen\ 0 = \frac{M_2\ sen\ 0}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2\ M_1\ M_2\ cos\ 0}}$$

Cada um dos conjugados é, pois, proporcional ao seno do angulo formado pelos planos dos outros dois, e a sua composição far-se-ha de modo analogo á composição das forças.

Si quizermos decompor um conjugado em dois outros contidos em dois planos dados AC e AF, cuja intersecção AB seja parallela ao plano do conjugado dado, faz-se passar por esta intersecção um plano parallelo ao conjugado e transporta-se este para esse plano de modo a dar-lhe uma posição (R, — R), por exemplo. (Fig 48).

Representando por M, M_1 e M_2 os momentos dos conjugados dados e componentes, e por α e β os angulos formados pelo plano do primeiro com os dos segundos, temos :

$$\frac{M_1}{M} = \frac{sen\ \beta}{sen\ (\alpha + \beta)} = \frac{sen\ \beta}{sen\ 0} \qquad \frac{M_2}{M} = \frac{sen\ \beta}{sen\ (\alpha + \beta)} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ 0}$$

donde:

$$M_1 = \frac{sen\ \beta}{sen\ 0}\ M \quad , \quad M_2 = \frac{sen\ \alpha}{sen\ 0}\ M$$

expressões dos valores dos conjugados componentes equivalentes ao conjugado dado e existentes nos planos considerados.

Representando por

$$\alpha_1, \quad \alpha_2 \quad \text{e} \quad \alpha_3$$

os angulos formados pelas arestas duas a duas, e sendo a área de um triangulo medida pela metade do producto de dois lados pelo seno do angulo por elles formados, temos:

$$a_1\, a_2\, sen\, \alpha_1 = 2M_1 \quad a_1\, a_3\, sen\, \alpha_2 = 2M_2 \quad a_2\, a_3\, sen\, \alpha_3 = 2M_3$$

Por meio destas equações determinam-se as arestas

$$a_1, \quad a_2 \quad \text{e} \quad a_3$$

e, conhecidas estas, o triangulo ABC, que se obtem reunindo dois a dois os seus extremos, representará o conjugado resultante.

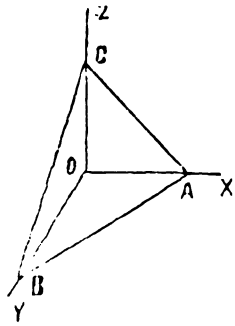


Fig. 50

Si os planos dos conjugados componentes forem perpendiculares entre si (fig. 50), os momentos

$$AOB = L, \quad AOC = M \quad \text{e} \quad COB = N$$

desses conjugados serão as projecções do momento

$$ABC = K$$

do conjugado resultante sobre cada um dos tres planos, de sorte que si representarmos por

$$\alpha, \quad \beta \quad \text{e} \quad \gamma$$

os angulos formados pelo plano do conjugado resultante com cada um dos planos coordenados ou pelo eixo deste conjugado com cada um dos eixos, teremos:

$$L = K \cos \alpha, \quad M = K \cos \beta, \quad N = K \cos \gamma \qquad (1)$$

Um conjugado qualquer póde ser, pois, substituido por tres conjugados equivalentes, contidos em tres planos coorde-

nados rectangulares, cujos momentos são iguaes ao producto do momento do conjugado considerado pelo coseno do angulo formado pelo seu plano com cada um dos planos coordenados.

As equações (1) nos dão:

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}, \quad \cos\delta = \frac{L}{K}, \quad \cos\beta = \frac{M}{K}, \quad \cos\gamma = \frac{N}{K}$$

Por meio destas equações determina-se o conjugado resultante K e os angulos formados pelo seu eixo com os eixos coordenados quando são dados os conjugados componentes

$$L, \ M \ e \ N$$

considerando um numero qualquer de conjugados:

$$P_1p_1 \ P_2p_2, \ldots\ldots P_np_n$$

formando com os planos coordenados os angulos

$$\left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\right), \ \left(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\right), \ldots\ldots \left(\alpha_n, \ \beta_n, \ \gamma_n\right),$$

decompondo cada um desses conjugado segundo os tres planos coordenados, representando por

$$L, \ M \ e \ N$$

os conjugados resultantes da composição de todos os conjugados existentes em cada um dos planos temos:

$$L = P_1p_1 \cos\alpha_1 + P_2p_2 \cos\alpha_2 + \ldots\ldots + P_np_n \cos\alpha_n$$

$$M = P_1p_1 \cos\beta_1 + P_2p_2 \cos\beta_2 + \ldots\ldots + P_np_n \cos\beta_n$$

$$N = P_1p_1 \cos\gamma_1 + P_2p_2 \cos\gamma_2 + \ldots\ldots + P_np_n \cos\gamma_n$$

Representando por K_r o conjugado resultante e por

$$\alpha, \beta \text{ e } \gamma$$

os angulos formados pelo seu eixo com os eixos coordenados temos finalmente para determinar este conjugado:

$$Kr = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \quad \cos\alpha = \frac{L}{K_r}, \ \cos\beta = \frac{M}{K_r}, \ \cos\gamma = \frac{N}{K_r}$$

Um conjugado e uma força contidos no mesmo plano ou em planos parallelos podem sempre compor-se em uma força unica igual e parallela á força considerada, pois podemos sempre modificar o conjugado de modo que as duas forças que o constituem sejam iguaes a força dada e collocal-o de modo que uma de suas forças actue na mesma direcção e em sentido contrario á força dada.

Nestas condições ficará restando como equivalente do systema apenas uma das forças do conjugado, igual e parallela á força primitiva.

Reciprocamente uma força P póde sempre ser decomposta em uma outra P' igual, pararella e applicada a um ponto ligado ao seu ponto de applicação, e em um conjugado cujo momento seja igual ao producto da força P pela menor distancia entre esta força e P'.

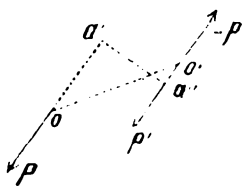


Fig. 51

Considerando a força P applicada em um ponto O fig. (51), si em um ponto O' applicarmos as duas forças

$$P' \text{ e } -P'$$

iguaes, parallelas a P e actuando em sentidos contrarios, teremos substituido a força P por um systema equivalente constituido pela força igual e parallela P' e pelo conjugado

$$\left(P, -P' \right)$$

cujo momento é igual a:

$$P \times a' a''$$

Um conjugado

$$\left(P, -P \right)$$

e uma força F quando não se acham contidos no mesmo plano ou em planos parallelas, podem ser substituidos de uma infinidade de modos por duas forças não existentes no mesmo plano. Transportando o conjugado parallelamente a si mesmo até que o ponto de applicação de uma de suas forças P coincida com o ponto de applicação da força F, a resultante R destas duas forças concorrentes e a outra força P do conjugado constituirão o systema equivalente, de duas forças não existentes no mesmo plano, si quisermos sujeitar uma das forças resultantes a passar por um ponto dado basta transportar o conjugado para um plano parallelo passando pelo ponto, e dispol-o de modo que uma de suas forças passe pelo ponto e a outra prolongada encontre a força dada.

Reciprocamente duas forças

$$F_1 \text{ e } F_2$$

não existentes no mesmo plano podem ser substituidas de uma infinidade de maneiras por um conjugado e uma força não existente no mesmo plano.

Decompondo uma das forças consideradas F_1 em duas outras

$$F_2 \text{ e } F_3$$

uma das quaes seja igual e parallela a F_2 e forme com ella um conjugado, fica o systema primitivo substituido pelo systema equivalente constituido pelo conjugado

$$\left(F_2, -F_2 \right)$$

e pela força F_3. Ora, si este systema póde ser por sua vez substituido por uma infinidade de systemas equivalentes de duas forças não existentes no mesmo plano, conclue-se que um systema de duas forças não existentes no mesmo plano póde ser substituido por uma infinidade de systemas de duas forças nas mesmas condições.

II

Considerando um systema qualquer de forças existentes no mesmo plano, referindo-o a dous eixos rectangulares e decompondo as forças segundo parallelas a esses eixos, teremos substituido o systema considerado por um outro equivalente constituido por dous grupos de forças parallelas aos eixos.

Si cada um desses grupos tiver uma resultante unica, a composição das duas dará para resultado final do systema uma força unica.

Si cada um dos grupos tiver para resultante um conjugado, a composição dos dous conjugados dará para resultante final do systema um conjugado unico.

Si o grupo de forças parallelas ao eixo dos x, por exemplo, reduzir-se a uma resultante e o grupo de forças parallelas ao eixo dos y reduzir-se a um conjugado parallelo a este eixo, a composição do conjugado e da força dará para resultante final do systema uma força unica parallela ao eixo dos x.

Supponhamos um systema de forças quaesquer não existentes no mesmo plano. Considerando um plano fixo ao systema, o plano dos xy, por exemplo, prolongando cada uma das forças até encontrar esse plano, supponhamos os seus pontos de applicação transportados para os traços respectivos.

Para determinar estes novos pontos de applicação basta fazer em cada uma das equações que representam essas forças a hypothese correspondente á existencia do ponto no plano dos xy.

Assim, considerando a força P_1, por exemplo, formando com os eixos os angulos α_1 β_1, γ_1 temos:

$$x' - x_1 = \frac{X_1}{Z_1}(z' - z_1),\ y' - y_1 = \frac{Y_1}{Z_1}(z' - z_1)$$

sendo:

$$X_1 = P_1 \cos \alpha_1 \quad Y_1 = P_1 \cos \beta_1 \quad Z_1 = P_1 \cos \gamma$$

Fazendo nestas equações:

$$z' = o$$

obteremos para coordenadas a_1 e b_1 do traço no plano dos xy:

$$a_1 = \frac{Z_1 x_1 - X_1 z_1}{Z_1}, \quad b_1 = \frac{Z_1 y_1 - Y_1 z_1}{Z_1}$$

Si entre as forças consideradas houver algumas parallelas do plano dos xy, no ponto de applicação de cada uma dessas forças consideraremos applicadas duas forças arbitrarias iguaes, directamente oppostas e parallelas ao eixo dos z, o que em nada modifica o systema; destas duas forças comporemos a positiva com a parallela ao plano e com a resultante comporemos a negativa; procederemos de modo identico para com todas as outras.

Decompondo cada uma das forças no seu novo ponto de applicação em duas outras uma no plano dos xy e outra perpendicular a este plano, teremos substituido o systema primitivo por um outro equivalente constituido por dois grupos de forças umas situadas em um mesmo plano dos xy e outras perpendiculares a este plano e, portanto, parallelas ao eixo dos z.

Si cada um destes grupos tem uma resultante unica fica o systema reduzido a essas duas forças, si ellas não se encontram, e a uma unica no caso contrario; si um dos grupos, o das forças situadas no plano, por exemplo, tem para resultante um conjugado e o outro uma força unica, decompondo a força em duas parallelas que encontrem as forças dos conjugados obteremos um systema de quatro forças convergentes duas a duas, cuja composição dará para resultante final do systema duas força situadas em planos parallelos; si, finalmente, cada um dos grupos tem para resultante

um conjugado, decompondo cada uma das forças de um dos conjugados como a força do caso precedente, teremos em planos parallelos dous grupos de tres forças, cada um dos quaes póde reduzir-se a uma unica e a resultante final do systema será ainda duas forças em planos parallelos.

Consideremos um systema de forças quaesquer:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

cujos pontos de applicação supporemos invariavelmente ligados.

Podemos substituir uma qualquer dessas forças P_1, por exemplo, por um systema equivalente constituido por uma força igual e parallela applicada a um ponto O, inteiramente arbitrario, ligado ao seu ponto de applicação, e por um conjugado cujo momento seja igual ao producto da força P_1 pela distancia entre as duas posições parallelas da mesma força.

Transportando, pois, cada uma das forças consideradas parallelamente a si mesma para um ponto qualquer o, por meio do conjugado correspondente, podemos substituir o systema primitivo por um outro equivalente constituido por n forças iguaes e parallelas respectivamente ás forças dadas, e convergindo todas no mesmo ponto o, e por n conjugados cujos momentos serão respectivamente iguaes ao producto de cada força pela distancia entre as suas duas direcções parallelas.

Pela composição das n forças convergentes e dos n conjugados entre si, substituiremos, finalmente, o systema de n forças quaesquer por um outro equivalente constituido por um conjugado e uma força unica applicada ao ponto o.

Si o conjugado resultante e a força unica acharem-se em planos parallelos a composição dos dous dará para resultante final do systema uma fórça, fora deste caso o conjugado e a força unica e, portanto, o systema de forças quaesquer, terão para equivalentes uma infinidade de systemas de duas forças não existentes no mesmo plano.

Referindo o systema de forças a tres eixos coordenados rectangulares (fig. 52), representando por x_1, y_1, z_1 as coordenadas do ponto de applicação da força P_1, por α_1, β_1, γ_1 os angulos que ella fórma com os eixos coordenados, e por p_1, p_2 e p_3 as suas componentes parallelas aos tres eixos, temos:

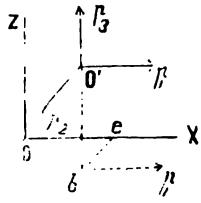


Fig. 52

$$p_1 = P_1 \cos \alpha_1,\ p_2 = P_1 \cos \beta_1,\ p_3 = P_1 \cos \gamma_1$$

Transportando a força p_1 para o ponto b por meio de um conjugado igual a:

$$p_1 \times o'b = z_1 P_1 \cos \alpha_1$$

ido em um plano parallelo ao plano dos xz, essa força icada em b póde ser transportada parallelamente a si ma ao eixo dos x ou ao ponto o por meio de um condo:

$$p_1 + be = y_1 P_1 \cos \alpha_1$$

ido no plano dos xy.

Transportando de modo identico as componentes p_2 e p_3 nos, finalmente, em cada plano dous conjugados:

$$x_1 P_1 \cos \beta_1,\quad -y_1 P_1 \cos \alpha_1,\quad \textit{no plano dos } xy$$

$$-x_1 P_1 \cos \gamma_1,\quad z_1 P_1 \cos \alpha_1,\quad \textit{no plano dos } xz$$

$$-z_1 P_1 \cos \beta_1,\quad y_1 P_1 \cos \gamma_1,\quad \textit{no plano dos } yz$$

Compondo os conjugados de cada um dos planos, os seis igados serão substituidos pelos tres equivalentes:

$$x_1 P_1 \cos \beta_1 - y_1 P_1 \cos \alpha_1 = \left(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1\right) P_1$$

$$z_1 P_1 \cos \alpha_1 - x_1 P_1 \cos \gamma_1 = \left(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1\right) P_1$$

$$y_1 P_1 \cos \gamma_1 - z_1 P_1 \cos \beta_1 - \left(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1\right) P_1$$

Tal é a expressão dos conjugados que é necessario intror nos tres planos coordenados quando se transporta a

força P_1 ou as suas componentes parallelamente a si mesma do ponto o' para o ponto O.

Os momentos da força P_1 relativamente aos tres eixos coordenados tendo para expressão:

$$l = P_1 \left(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1 \right)$$

$$m = P_1 \left(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1 \right)$$

$$n = P_1 \left(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1 \right)$$

conclue-se que uma força applicada a um ponto qualquer do espaço póde ser substituida por tres forças parallelas aos tres eixos rectangulares e tres conjugados contidos nos tres planos coordenados, as forças componentes sendo iguaes respectivamente ás projecções da força considerada sobre cada um dos eixos, e os momentos das conjugadas sendo iguaes aos momentos da força considerada relativamente aos tres eixos.

As expressões relativas aos momentos das forças teem, pois, para imagem mecanica o systema especial de duas forças iguaes parallelas e de sentidos contrarios.

Estas expressões que apresentaram-se como simples relações algebricas, com a concepção dos conjugados ficam tendo uma significação mecanica perfeitamente definida.

Si as componentes

$$X, \quad Y \quad \text{e} \quad Z$$

da força final, representam translações que tendem a produzir-se segundo cada um dos eixos, as componentes do conjugado resultante

$$L \quad M \quad \text{e} \quad N$$

representam rotações que tendem a realizar-se em torno dos mesmos eixos; as equações que definem a resultante, são pois, a traducção algebrica do phenomeno mecanico da translação, e as equações que definem o conjugado são a traducção algebrica do phenomeno mecanico da rotação.

Procedendo do mesmo modo com cada uma das forças, e representando por:

$$x_2,\ x_3 \ldots\ x_n\ ,\qquad y_2,\ y_3 \ldots\ y_n\ ,\qquad z_2,\ z_3 \ldots\ z_n\ ,$$

$$\alpha_2,\ \alpha_3 \ldots\ \alpha_n\ ,\qquad \beta_2\ \beta_3 \ldots\ \beta_n\ ,\qquad \gamma_2,\ \gamma_3 \ldots\ \gamma_n$$

as coordenadas dos seus pontos de applicação e os angulos que formam com cada um dos eixos, representando por

$$X,\ Y \text{ o } Z,\qquad L,\ M \text{ o } N$$

as resultantes de todas as forças segundo cada um dos eixos e as resultantes de todos os conjugados de cada um dos planos, teremos o systema de n forças quaesquer substituido pelo systema equivalente de tres forças e tres conjugados seguintes:

$$X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha + \ldots + P_n \cos \alpha_n = \Sigma P \cos \alpha'$$

$$Y = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \varphi_2 + \ldots + P_n \cos \beta_n = \Sigma P \cos \beta'$$

$$Z = P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \ldots + P_n \cos \gamma_n = \Sigma P \cos \gamma'$$

$$L = P_1 \left(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1\right) + P_2 \left(y_2 \cos \gamma_1 - z_2 \cos \beta_2\right) + \ldots\ldots$$
$$+ P_n \left(y_n \cos \gamma_n - z_n \cos \beta_n\right) =$$
$$= \Sigma P \left(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta'\right) = \Sigma \left(Zy' - Yz'\right)$$

$$M = P_1 \left(z_2 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1\right) + P_2 \left(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2\right) + \ldots$$
$$+ P_n \left(z_n \cos \alpha_n - x_n \cos \gamma_n\right) =$$
$$= \Sigma P \left(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma'\right) = \Sigma \left(Xz' - Zx'\right)$$

$$N = P_1 \left(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1\right) + P_2 \left(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2\right) + \ldots$$
$$+ P_n \left(x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n\right) =$$
$$= \Sigma P \left(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha'\right) = \Sigma \left(Yx' - Xy'\right)$$

Representando por R as resultantes das tres forças

$$X, \quad Y \quad e \quad Z,$$

por

$$\alpha, \quad \beta \quad e \quad \gamma$$

os angulos que forma com os eixos, por K o conjugado resultante dos tres conjugados

$$L, \quad M \quad e \quad N$$

e por

$$a, \quad b \quad e \quad c$$

os angulos que forma o seu eixo com os eixos coordenados, teremos, finalmente, para equivalente do systema primitivo, o systema constituido por uma unica força R determinada pelas equações :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{R}$$

e por um conjugado resultante determinado pelas equações :

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}, \quad \cos a = \frac{L}{K}, \quad \cos b = \frac{M}{K},$$

$$\cos c = \frac{N}{K}.$$

Estas ultimas equações nos mostram que o momento do conjugado resultante corresponde á somma *maximum* de momentos das forças.

Si o systema de forças achar-se situado em um unico plano, o dos xy, por exemplo, teremos:

$$Z = 0 \quad z' = 0$$

e, portanto:

$$M = 0 \quad L = 0,$$

e o systema terá para equivalente um outro constituido pela força :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

sendo

$$X = \Sigma P \cos \alpha' \quad Y = \Sigma P \cos \beta',$$

e pelo conjugado :

$$N = \Sigma P \left(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha'\right) = \Sigma \left(Yx' - Xy'\right) .$$

Consideremos o systema qualquer de forças reduzido a dois grupos de forças, as de um :

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad etc.,$$

perpendiculares a um plano, que supporemos o dos xy e as do outro situados neste plano.

Transportando parallelamente a si mesmas para o eixo dos x e depois para a origem, as forças do primeiro grupo, podemos substituil-o por um systema equivalente constituido por uma força :

$$Z = \Sigma Z'$$

ou

$$Z = \Sigma P \cos \gamma'$$

representando γ' o angulo que formam as forças com o eixo dos z, e dois conjugados cuja expressão vamos deduzir.

Considerando uma das forças Z_1, o seu transporte para o eixo dará o conjugado $Z_1 b_1$, e o seu transporte para a origem dará o conjugado

$$- Z_1 \ a_1,$$

sendo

$$a_1 \quad e \quad b_1$$

as coordenadas do ponto de applicação ou do traço da força com o plano dos xy.

Substituindo estas duas quantidades pelos seus valores já determinados, temos para expressão dos conjugados:

$$\left(Z_1 y_1 - Y_1 z_1\right), \ \left(X_1 z_1 - Z_1 x_1\right)$$

Para o grupo de forças teremos, pois, os conjugados resultantes:

$$L' = \Sigma \left(Zy' - Yz'\right) = \Sigma\ P \left(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta'\right)$$

$$M' = \Sigma \left(Xz' - Zx'\right) = \Sigma\ P \left(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma'\right)$$

Quanto ao grupo de forças situadas no plano dos xy, teriamos, como vimos, o systema equivalente constituido pela força

$$X = \Sigma\ P \cos \alpha' \qquad Y = \Sigma\ P \cos \beta'$$

e o conjugado

$$N = \Sigma \left(Yx' - Xy'\right) = \Sigma\ P \left(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha'\right)$$

O systema constituido pelos dois grupos de forças, umas existentes no plano e outras perpendiculares a elle, ficará, pois, substituido por um systema equivalente constituido pelas forças:

$$X = \Sigma\ P \cos \alpha' \qquad Y = \Sigma\ P \cos \beta' \qquad Z = \Sigma\ P \cos \gamma'$$

e pelos conjugados:

$$L' = \Sigma \left(Zy' - Yz'\right) = \Sigma\ P \left(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta'\right)$$

$$M' = \Sigma \left(Xz' - Zx'\right) = \Sigma\ P \left(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma'\right)$$

$$N' = \Sigma \left(Yx' - Xy'\right) = \Sigma\ P \left(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha'\right)$$

A composição das tres forças e dos tres conjugados dará para resultante final do systema a força unica:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{R},$$

e o conjugado resultante:

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \quad \cos a = \frac{L}{K}, \quad \cos b = \frac{M}{K},$$

$$\cos c = \frac{N}{K}.$$

Quanto ás forças auxiliares arbitrarias, sendo iguaes e directamente oppostas duas a duas, os termos que a ellas se referem destroem-se dois a dois.

Si todas as forças do systema forem parallelas, teremos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots$$

As tres primeiras equações se reduzirão a:

$$R = \Sigma P$$

e as tres ultimas a:

$$L' = \cos \gamma' \Sigma Py' - \cos \beta' \Sigma Pz'$$

$$M' = \cos \alpha' \Sigma Pz' - \cos \gamma' \Sigma Px'$$

$$N' = \cos \beta' \Sigma Px' - \cos \alpha' \Sigma Py'$$

Si tivermos

$$\Sigma P = 0,$$

teremos:

$$R = 0$$

e a resultante do systema será um conjugado:

$$K = \sqrt{L'^2 + M'^2 = N'^2}$$

Si tivermos:

$$\Sigma Px' = 0, \quad \Sigma Py' = 0,$$

teremos:

$$N = 0$$

e o conjugado resultante tendo um momento nullo em relação ao eixo dos z achar-se-ha em um plano parallelo a este eixo; si tivermos apenas

$$\Sigma Px' = 0$$

as expressões dos conjugados se simplificarão, mas em geral não se annullam.

Para o grupo de forças teremos, pois, os conjugados resultantes:

$$L' = \Sigma \left(Zy' - Yz'\right) = \Sigma\ P \left(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta'\right)$$

$$M' = \Sigma \left(Xz' - Zx'\right) = \Sigma\ P \left(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma'\right)$$

Quanto ao grupo de forças situadas no plano dos xy, teriamos, como vimos, o systema equivalente constituido pela força

$$X = \Sigma\ P \cos \alpha' \qquad Y = \Sigma\ P \cos \beta'$$

e o conjugado

$$N = \Sigma \left(Yx' - Xy'\right) = \Sigma\ P \left(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha'\right)$$

O systema constituido pelos dois grupos de forças, umas existentes no plano e outras perpendiculares a elle, ficará, pois, substituido por um systema equivalente constituido pelas forças:

$$X = \Sigma\ P \cos \alpha' \qquad Y = \Sigma\ P \cos \beta' \qquad Z = \Sigma\ P \cos \gamma'$$

e pelos conjugados:

$$L' = \Sigma \left(Zy' - Yz'\right) = \Sigma\ P \left(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta'\right)$$

$$M' = \Sigma \left(Xz' - Zx'\right) = \Sigma\ P \left(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma'\right)$$

$$N' = \Sigma \left(Yx' - Xy'\right) = \Sigma\ P \left(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha'\right)$$

A composição das tres forças e dos tres conjugados dará para resultante final do systema a força unica:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{R},$$

› conjugado resultante:

$$K = \sqrt{L^2 + M^1 + N^2} \quad \cos a = \frac{L}{K}, \quad \cos b = \frac{M}{K},$$

$$\cos c = \frac{N}{K}.$$

Quanto ás forças auxiliares arbitrarias, sendo iguaes e ectamente oppostas duas a duas, os termos que a ellas se ferem destroem-se dois a dois.

Si todas as forças do systema forem parallelas, teremos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots$$

As tres primeiras equações se reduzirão a:

$$R = \Sigma P$$

as tres ultimas a:

$$L' = \cos \gamma' \Sigma Py' - \cos \beta' \Sigma Pz'$$

$$M' = \cos \alpha' \Sigma Pz' - \cos \gamma' \Sigma Px'$$

$$N' = \cos \beta' \Sigma Px' - \cos \alpha' \Sigma Py'$$

Si tivermos

$$\Sigma P = 0,$$

remos:

$$R = 0$$

a resultante do systema será um conjugado:

$$K = \sqrt{L'^2 + M'^2 = N'^2}$$

Si tivermos:

$$\Sigma Px' = 0, \quad \Sigma Py' = 0,$$

remos:

$$N = 0$$

o conjugado resultante tendo um momento nullo em reção ao eixo dos z achar-se-ha em um plano parallel › a este xo; si tivermos apenas

$$\Sigma Px' = 0$$

s expressões dos conjugados se simplificarão, mas em geral ão se annullam.

Representando por θ o angulo formado pelo eixo do conjugado e a direcção da força unica resultante de um systema qualquer de forças, temos:

$$\cos\theta = \cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma$$

Substituindo os cosenos do segundo membro pelos seus valores, teremos para expressão da inclinação da força unica sobre o plano do conjugado:

$$\cos\theta = \frac{LX + MY + NZ}{K\ R} =$$

$$= \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\ \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Como o ponto o para o qual se faz o transporte das forças ou a origem das coordenadas, é inteiramente arbitrario, o systema de uma força unica e um conjugado pelo qual se póde substituir um systema de forças dado é indeterminado, mas entre todos os que podemos obter ha um perfeitamente determinado pela posição especial do plano do conjugado relativamente á direcção da força unica.

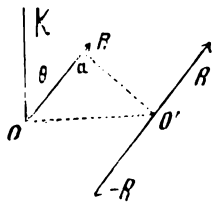


Fig. 53

Seja o R a força unica applicada á origem O, ok o eixo do conjugado resultante K, e θ o angulo formado por este eixo com a direcção da força, fig. (53).

Transportando a força R parallelamente a si mesma para um ponto qualquer O', teremos substituido o systema primitivo por um outro equivalente constituido por uma força unica R applicada ao ponto o', e por dois conjugados: K e $(R, -R) = K_1$.

A composição destes dois conjugados dará o conjugado final K'.

Si o ponto o' achar-se sobre a direcção da força oR teremos para valor do conjugado, consequente do transporte para esse ponto: $K_1 = o$, e o conjugado final K' será igual a K,

isto é, para qualquer dos pontos da força oR tomado para origem, o conjugado é sempre o mesmo que para a origem primitiva O; si tomarmos uma nova origem o'' na direcção de $O' R$, parallela á direcção de oR, o conjugado resultante do transporte será K', $= (R, -R)$, que terá para momento $R \times o'a$, isto é, o producto da força pela distancia entre as duas parallelas. Sendo o momento do conjugado K', relativo á origem o' da mesma parallela, igual a $R \times o'a$, conclue-se que para todos os pontos de uma mesma parallela a força unica OR, o conjugado final K' tem o mesmo valor, pois é resultante para todos dos mesmos conjugados componentes: K' e $R \times o'a = K_1$.

Não achando-se a nova origem o' sobre a direcção da força unica oR, o conjugado K', proveniente do transporte da força e que tem de ser composto com o conjugado resultante K para obter-se o conjugado final K', terá o seu eixo perpendicular ao plano Roo' e, portanto, á força unica OR existente nesse plano.

Desde que façamos variar a origem O' este eixo occupará no plano perpendicular a OR todas as posições formando com o eixo do conjugado resultante K angulos agudos ou obtusos; no primeiro caso o conjugado final resultante da composição dos dois será sempre maior que o conjugado K, no segundo o conjugado final póde ser maior ou menor que o conjugado resultante K, dependendo isso da grandeza do outro conjugado componente K_1, que por sua vez depende da distancia $o'a$ da nova origem á direcção da força unica oR, que varia de zero do infinito.

O conjugado resultante K', relativo á origem O, será, pois, maior ou menor que os conjugados finaes relativos a uma outra qualquer origem O' desde que não se dê a coincidencia de OK com oR, isto é, desde que o eixo desse conjugado resultante não coincida com a direcção da força unica OR ou desde que o plano do conjugado não seja perpendicular a esta força.

Dada esta coincidencia, porém, o eixo do conjugado resultante K e o do conjugado proveniente do transporte para a nova origem K_1, serão sempre perpendiculares e, portanto, o conjugado final para a nova origem será sempre maior que o conjugado resultante K da origem primitiva o.

O ponto de espaço, pois, para o qual o conjugado resultante K é menor que o conjugado resultante K_1, relativo a toda outra qualquer origem, é aquelle para o qual o eixo do conjugado resultante K coincide com a direcção da força unica R ou aquelle para o qual o plano desse conjugado é perpendicular á direcção desta força.

Determinado este ponto, gosarão da mesma propriedade todos os pontos da parallela tirada por elle á força unica R, pois para todos elles o conjugado é o mesmo, e confundem-se todos os seus eixos.

Existe, pois, no espaço, apenas um eixo para o qual o conjugado resultante K tem o seu plano perpendicular á direcção da força unica R e tem um valor *minimum*.

Para determinar este conjugado transportemos a força unica R ou as suas componentes X, Y e Z para um ponto o' cujas coordenadas sejam x', y', z' por intermedio dos conjugados:

$$Yz' - Zy' \ , \ Zx' - Xz' \text{ e } Xy' - Yx'$$

Compondo estes conjugados com os outros L, M e N relativos á origem primitiva, substituiremos o systema por uma força unica R, applicada a O', e os tres conjugados:

$$L' = L + Yz' - Zy' \quad M' = M + Zx' - Xz' \quad N' = N + Xy' - Yx'$$

Compondo estes tres conjugados em um unico teremos para conjugado final:

$$K = \sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}$$

Representando por θ' o angulo formado pelo eixo deste conjugado e a direcção de força unica R applicada á nova origem o', temos:

$$\cos \theta' = \frac{L' X + M' Y + N' Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}}$$

Para que o eixo do conjugado resultante coincida com a direcção da força unica é nescessario que tenhamos $\theta' = o$ ou $\cos \theta' = 1$, isto é:

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2} = L' X + M' Y + N' Z,$$

d'onde:

$$(M' X - L' Y)^2 + (N' Y - M' Z)^2 + (L' Z - N' X)^2 = o,$$

portanto:

$$M' X - L' Y = o,\ N' Y - M' Z = o,\ L' Z - N' X = o$$

Substituindo L', M', e N' pelos seus valores, temos:

$$MX + XZ x' - X^2 z' - YL - Y^2 z' + YZ y' = o$$

$$NY + YX y' - Y^2 x' - MZ - Z^2 x' + ZX z' = o$$

$$LZ + ZY z' - Z^2 y' - NX - X^2 y' + XY x' = o$$

Eliminando x' entre a primeira e a terceira, z' entre a segunda e a terceira e y' entre a primeira e a segunda, temos:

$$\begin{aligned} y' Z - z' Y &= L - X \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ z' X - x' Z &= M - Y \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ x' Y - y' X &= N - Z \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} \end{aligned} \qquad (I)$$

Destas equações apenas duas são distinctas e representam umá recta, lugar geometrico de todos os pontos de applicação da força unica R, isto é, são as equações que definem a propria força R.

O momento do conjugado cujo plano é perpendicular a a esta recta, tem para expressão:

$$\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2} =$$

$$\left[L+Y z' - Zy')^2 + (M+Zx'-Xz')^2 + (N+Xy'-Y x')^2\right]^{\frac{1}{2}} = K'$$

Substituindo as quantidades comprehendidas nos parenthesis pelos seus valores dados pela equação (1), temos:

$$K' = \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \text{ ou } K' = \frac{LX + MY + NZ}{R}$$

A este conjugado *minimum* denomina-se *conjugado central* e, como vemos, o seu momento é igual ao momento *minimun maximorum* das forças, isto é, o *conjugado central* é igual à somma dos momentos das forças relativamente a uma das forças unicas a que é reductivel o systema.

O eixo do conjugado central denomina-se *eixo central* e para elle o conjugado resultante é simultaneamente um *maximum* relativamente a todos os eixos que se cruzam com elle no mesmo ponto ou origem, e um *minimum* relativamente áquelles que dão conjugados *maxima* para os diversos pontos do espaço.

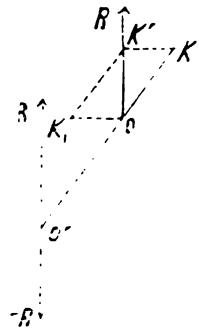


Fig. 54

Para determinarmos o eixo central consideremos a força unica R applicada a um ponto o, e seja OK o conjugado correspondente. Fig (54.)

Transportemos essa força para um ponto o' tal que a perpendicular ao plano ROO' ou o eixo do conjugado (R, — R) por meio do qual se faz o transporte, se ache no plano ROK e do lado de OR, para o qual esse eixo tenha a direcção OK_1, pois é necessario que a força unica R fique comprehendida no angulo dos eixos dos conjugados componentes K e K_1. Escolhendo O' a uma distancia $OO' = p$ tal que o momento do conjugado

$(R, -R)$ seja igual ao lado OK_1 do parallelogrammo, que se constroe projectando o conjugado K sobre a força unica R, temos: $OK_1 = Rp$. Designando por θ o angulo KOK', formado pelo eixo do conjugado K com a direcção da força unica R, teremos, para determinar a posição do ponto O', as equações seguintes, notando que o eixo do conjugado K' coincide com a força R e o de K_1 lhe é perpendicular:

$$\cos\theta = \frac{LX + MY + NZ}{KR}, \quad K' = K\cos\theta = \frac{LX + MY + NZ}{R}$$

$$K_1 = Rp = K \operatorname{sen}\theta$$

O ponto O' será um ponto qualquer da recta parallela á força unica R, tirada a uma distancia:

$$p = \frac{K \operatorname{sen}\theta}{R}$$

desta força, no plano perpendicular ao plano KOR, segundo a direcção de R e do lado tal que fique esta força comprehendida entre os eixos dos conjugados componentes.

Si tomarmos O' sobre a perpendicular ao plano KOR no ponto O, representando por a, b e c as suas coordenadas relativas a tres eixos rectangulares tendo para origem o ponto O, e sendo $oo' = p$, perpendicular á direcção da força unica R, cujas componentes segundo os tres eixos são X, Y e Z, e ao eixo do conjugado resultante, cujos componentes segundo os mesmos eixos são: L, M e N, teremos para determinar as coordenadas do ponto O', e, portanto, a sua posição, as equações:

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 = \frac{K^2 \operatorname{sen}^2\theta}{R^2},$$

$$aX + bY + cZ = o,$$

$$aL + bM + cN = o$$

Estas equações nos dão dous pontos com as mesmas coordenadas porém com signaes contrarios, e dos dous

deve ser tomado aquelle para o qual o eixo do conjugado K_1 satisfaça a condição que estabelecemos relativamente á direcção da força R.

Determinado o ponto O', a parallela á força unica R, tirada por esse ponto, será o eixo *central*.

Supponhamos, finalmente, que se reduza um systema de forças a uma resultante R e a um conjugado K. A condição para que esse systema fique reduzido somente a uma força R', é que a força R e o conjugado K estejam no mesmo plano ou em planos parallelos. Em qualquer destes dous casos o eixo do conjugado K será perpendicular á direcção da força e, portanto, teremos, na formula:

$$\cos \theta = \frac{L X + M Y + N Z}{KR}$$

o angulo θ igual a 90°, do que resulta :

$$L X + M Y + N Z = o$$

equação que representa a relação que deve existir entre as forças e os momentos em relação a tres eixos rectangulares para que o systema tenha somente como resultante uma força R'.

Si se quizer exprimir que as forças do systema são reductiveis a uma unica passando por um ponto dado, será necessario exprimir que o conjugado resultante é nullo o que dará as tres equações :

$$L = o, \; M = o, \; N = o$$

que traduzidas em linguagem vulgar nos mostram que neste caso a somma dos momentos deve ser nulla em relação aos tres eixos que se cruzam no ponto dado.

Para que o systema de forças se reduza a um simples conjugado é necessario evidentemente que tenhamos :

$$R = o \text{ ou } X = o, \; Y = o, \; Z = o$$

isto é, que as forças do systema transportadas parallelamente a si mesmas para um mesmo ponto ahi estejam em equilibrio.

Além disso é necessario que o conjugado K não seja nullo e por conseguinte as tres quantidades :

$$L, M \text{ e } N,$$

não deverão ser nullas simultaneamente.

Neste caso, pois, verifica-se ainda a relação :

$$L X + M Y + N Z = o$$

exigida pelo caso da reducção a uma simples força R'.

CENTRO DE GRAVIDADE

O estudo que acabamos de fazer encontra uma primeira applicação na determinação do centro de gravidade dos systemas, preparação previa indispensavel ao desenvolvimento do theoria do equilibrio.

Todos os corpos acham-se submettidos a acção da gravidade, força continua, variavel com a latitude e a altura e cujas acções são mais ou menos convergentes para um ponto interior da terra.

Sendo as dimensões dos corpos e distancias consideradas no estudo da mecanica diminutas quando comparadas á grandeza do raio da terra, consideram-se as acções da gravidades constantes e parallelas á vertical, de modo que um systema submettido á acção dessa força fica nas condições dos que se acham submettidos á acção de forças parallelas.

O estudo da determinação do ponto de applicação da resultante de todas as acções da gravidade sobre os systemas reduz-se pois, mediante este desprezo das variações de intensidade e direcção, a uma simples applicação da theoria da composição das forças parallelas.

A resultante de todas as acções da gravidade sobre um systema denomina-se peso do systema, e o seu ponto de applicação *centro de gravidade* do systema.

A posição do centro de gravidade referido a tres planos coordenados rectangulares determina-se, pois, como o centro de forças parallelas pelas equações

$$R = \Sigma p = P, \quad X = \frac{\Sigma px}{P}, \quad Y = \frac{\Sigma py}{P}, \quad Z = \frac{\Sigma pz}{P} \qquad (1)$$

nas quaes o numerador representa a somma dos momentos dos pesos das differentes partes do systema relativamente a cada um dos planos coordenados, e o denominador a somma de todos esses pesos ou o peso total do systema.

Sendo os pesos dos corpos proporcionaes ás suas massas, si representarmos por:

$$m_1, \; m_2, \; m_3, \; \ldots\ldots \; m_n$$

as massas das differentes partes do systema e fizermos:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots + m_n x_n = \Sigma mx$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots\ldots + m_n y_n = \Sigma my$$

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots\ldots + m_n z_n = \Sigma mz$$

$$m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n = \Sigma m = M$$

temos:

$$M = \Sigma m, \quad X = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad Y = \frac{\Sigma my}{M}, \quad Z = \frac{\Sigma mz}{M} \qquad (2)$$

A posição do centro de gravidade como nos mostram estas formulas é independente da intensidade desta força e depende apenas das massas do systema, e dahi a denominação de *centro de massa* ou de *inercia* dada por alguns a esse ponto.

Si o systema considerado for homogeneo as massas serão então proporcionaes aos volumes. Representando pois por:

$$v_1, \; v_2, \; v_3, \; \ldots\ldots \; v_n$$

os volumes de suas differentes partes constituintes e fazendo:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots\ldots + v_n x_n = \Sigma vx$$

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots\ldots + v_n y_n = \Sigma vy$$

$$v_1 z_1 + v_2 z_2 + \ldots\ldots + v_n z_n = \Sigma vz$$

$$v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = \Sigma v = V$$

teremos:

$$V = \Sigma v\ ,\ X = \frac{\Sigma vx}{V},\ Y = \frac{\Sigma vy}{V},\ Z = \frac{\Sigma vz}{V} \qquad (3)$$

Por estas formulas vemos que neste caso, o centro de gravidade não depende da densidade da materia do systema, mas apenas de seu volume ou da sua figura e dahi a denominação de *centro de figura*.

A determinação do centro de gravidade de uma figura geometrica póde, pois, ser substituida pela determinação do centro de gravidade de um solido homogeno que tenha a a mesma forma.

Si o systema considerado tiver uma das suas dimensões infinitamente pequena relativamente ás outras duas, a questão reduz-se á determinação do centro de gravidade de uma superficie, si forem duas das dimensões infinitamente pequenas relativamente á terceira, a questão reduz-se á determinação do centro de gravidade de uma linha, e, nestes casos o volume e seus elementos devem ser substituidos pela superficie ou pela linha e elementos correspondentes.

Si todos os pontos constituintes do systema tiverem o mesmo peso, isto é, si:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \text{etc.} = p\ ,$$

teremos:

$$P = np\ ,\ X = \frac{\Sigma x}{n},\ Y = \frac{\Sigma y}{n},\ Z = \frac{\Sigma z}{n} \qquad (4)$$

Sob esta fórma, as coordenadas do centro de gravidade nos mostram que este ponto coincide com o *centro das*

medias distancias do systema, isto é, com o ponto cujas distancias aos tres planos coordenados são a média arithmetica das distancias de todos os pontos do systema aos mesmos planos.

Para que este facto fique bem claro estudemos as propriedades do *centro das médias distancias*, e o modo de determinal-o.

Antes de tudo demonstremos o seguinte:

Theorema — Si uma recta $A\,B$ fig. (55) é dividida no ponto o em segmentos additivos proporcionaes a m e a n, as partes de parallelas $A\,a$, $B\,c$ e $O\,b$, comprehendidas entre essa recta e uma outra recta arbitraria $A'\,B'$, acham-se ligadas pela relação:

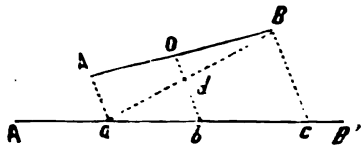


Fig. 55

$$(m+n)\,ob = m \times B\,c + n \times A\,a.$$

Unindo o ponto B ao ponto a, os triangulos semelhantes

$$A\,B\,a \quad \text{e} \quad O\,A\,B$$

nos dão:

$$\frac{O\,d}{A\,a} = \frac{O\,B}{A\,B} = \frac{n}{m+n}$$

ou:

$$(m+n)\,O\,d = n \times A\,a.$$

Os triangulos

$$O\,B\,c \quad \text{e} \quad O\,A\,B$$

nos dão:

$$\frac{d\,b}{B\,c} = \frac{c\,b}{A\,B} = \frac{A\,O}{A\,B} = \frac{m}{m+n}$$

donde:

$$(m+n)\,d\,b = m \times B\,c$$

Sommando esta igualdade com (1), resulta :

$$(m + n)\ (o\,d + d\,b) = m \times B\,c + n \times A\,a$$

ou :

$$(m + n)\ o\,b = m \times B\,c + n \times A\,a.$$

Considerando as distancias

$$A\,a,\ B\,c \text{ e } O\,b$$

como positivas ou negativas segundo a situação dos pontos

$$A,\ O \text{ e } B$$

é na parte superior ou inferior de $A'B'$, teremos de um modo geral, representando por

$$l,\ l_1 \text{ e } l_2$$

os valores das linhas

$$O\,b,\ B\,c \text{ e } A\,a.$$

$$(m + n)\ l = m\,l_1 + n\,l_2$$

Isto estabelecido, vamos demonstrar o seguinte:

Principio — *Considerando um systema de* n *pontos*

$$m_1,\ m_2\ m_3 \ldots\ldots m_n$$

no espaço, se determinar-mos um ponto C_1, *meio da recta* $m_1\ m_2$, *unirmos* C_1 *a* m_3 *e determinarmos* C_2 *a um terço da distancia* $C_1\,m_3$, *contado a partir de* C_1, *unirmos* C_2 *a* m_4 *e marcarmos* C_3 *a um quarto da distancia* $C_2\,m_4$, *contado a partir de* C_2 *e assim successivamente chegaremos, finalmente a um ultimo ponto* C_{n-1} *cuja distancia a um plano qualquer é o quociente por* n *da somma algebrica das distancias a esse plano de todos os pontos do systema considerado.*

Representemos por

$$p_1,\ p_2,\ p_3\ etc.$$

os valores das distancias dos pontos

$$m_1,\ m_2,\ m_3\ etc.$$

ponto M a o centro O das médias distancias, mais a somma dos quadrados das distancias do ponto O a todos os pontos

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ etc.$$

Seja O o centro das médias distancias e projectemos os pontos

$$m_1,\ m_2,\ m_3\ etc.$$

sobre a recta MO. Os triangulos

$$MOm_1,\quad MOm_2,\quad MOm_3\ etc.$$

nos dão:

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{Mm_1}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{Om_1}^2 + 2\,OM \times Om' \\ \overline{Mm_2}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{Om_2}^2 + 2\,OM \times Om'' \\ \overline{Mm_3}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{Om_3}^2 + 2\,OM \times Om''' \\ \quad etc. \qquad\qquad etc. \end{cases}$$

Os ultimos termos dos segundos membros terão o signal mais ou menos conforme a projecção do ponto do systema sobre a recta MO cahir do lado opposto ou do mesmo lado do ponto O, áquelle em que se acha o ponto M.

Sommando membro a membro as igualdades (2) resulta:

$$\Sigma\,\overline{Mm_i}^2 = n\,\overline{MO}^2 + \Sigma\,\overline{Om_i}^2$$

porque a somma dos terceiros termos dos segundos membros representando o producto de $2\,OM$ pela somma algebrica das distancias do centro das medias distancias ás projecções dos pontos do systema sobre um eixo OM, passando pelo ponto O, é nulla, conforme as consequencias precedentes.

Deste principio resulta:

1.º O ponto do espaço cuja somma dos quadrados das distancias a todos os pontos de um systema é *minimum*, é o centro das medias distancias do systema.

2.º O ponto de um plano cuja somma dos quadrados das distancias a pontos dados é *minimum*, é a projecção, sobre esse plano, do centro das medias distancias.

Assim caracterisado o centro das médias distancias, supponhamos o systema considerado referido a tres eixos rectangulares. As distancias de cada ponto aos planos serão representadas pelas suas coordenadas, e, do mesmo modo, as do centro das medias distancias do systema.

Representando as primeiras respectivamente por:

$$z_1, x_1, y_1; x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n$$

e as segundas por:

$$X, Y, Z$$

teremos, conforme o principio anterior, para distancia do centro das medias distanciaes, ou para suas coordenadas:

$$X = \frac{\Sigma x}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma y}{n}, \quad Z = \frac{\Sigma z}{n},$$

expressões que são as mesmas que as expressões (4) das coodernadas do centro de gravidade do systema, de fórma que os pontos por ella definidos coincidem.

Apreciando as fórmulas (2) e (3) nós vemos que esta coincidencia ainda dá-se quando cada elemento do systema é considerado como constituido por um numero de pontos proporcional a sua massa ou ao seu volume, no caso de tres dimensões, e de sua superficie ou comprimento no caso de duas ou uma dimensão.

A determinação do centro de gravidade póde fazer-se independentemente das coordenadas dos differentes pontos do systema.

Para mostrar isto elevemos ao quadrado as equações :

$$MX = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots + m_n x_n$$

$$MY = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots\ldots + m_n y_n$$

$$MZ = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n$$

temos:

$$M^2 X^2 = m_1^2 x_1^2 + m_2^2 x_2^2 + \ldots + m_n^2 x_n^2 + 2 m_1 m_2 x_1 x_2 +$$
$$+ 2 m_1 m_3 x_1 x_3 + 2 m_2 m_3 x_2 x_3 + \ldots$$

$$M^2 Y^2 = m_1^2 y_1^2 + m_2^2 y_2^2 + \ldots m_n^2 y_n^2 + 2 m_1 m_2 y_1 y_2 +$$
$$+ 2 m_1 m_3 y_1 y_3 + 2 m_2 m_3 y_2 y_3 + \ldots$$

$$M^2 Z^2 = m_1^2 z_1^2 + m_2^2 z_2^2 + \ldots + m_n^2 z_n^2 + 2 m_1 m_2 z_1 z_2 +$$
$$+ 2 m_1 m_2 z_1 z_2 + 2 m_1 m_3 z_1 z_3 + \ldots$$

sommando estas igualdades membro a membro, temos:

$$M^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) = m_1^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + m_2^2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) +$$
$$\ldots m_n^2 (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2) + 2 m_1 m_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) +$$
$$2 m_1 m_3 (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) + 2 m_2 m_3 (x_2 x_3 +$$
$$+ y_2 y_3 + z_2 z_3) + \ldots$$

Representando respectivamente, por:

$$D, \quad d_1, \quad d_2, \ldots d_n$$

as distancias do centro de gravidade e de cada um dos pontos á origem, temos:

$$M^2 D^2 = m_1^2 d_1^2 + m_2^2 d_2^2 + \ldots + m_n^2 d_n^2 +$$
$$+ 2 m_1 m_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) +$$
$$+ 2 m_1 m_3 (x_1 x_3 + y_1 x_3 + z_1 z_3) +$$
$$+ 2 m_2 m_3 (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3) + \ldots$$

Representando por:

$$d', \quad d'', \quad d''', \ldots$$

as distancias entre os pontos do systema considerados dous a dous, temos:

$$d'^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) +$$
$$+ (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2\,(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$$

donde:

$$2\,(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = d_1^2 + d_2^2 - d'^2$$

Para d'' achariamos do mesmo modo:

$$2\,(x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) = d_1^2 + d_3^3 - d''^2,$$

e assim por diante.

Substituindo estes valores, temos:

$$M^2 D^2 = m_1^2 d_1^2 + m_2^2 d_{22} + \ldots + m_n^2 d_n^2 +$$
$$+ m_1 m_2 (d_1^2 + d_2^2 - d'^2) +$$
$$+ m_1 m_3 (d_1^2 + d_{32} - d''^2) + \ldots = m_1^2 d_1^2 + m_2^2 d_2^2 +$$
$$+ \ldots + m_n^2 d_n^2 + m_1 m_2 d_1^2 + m_1 m_2 d_2^2 + m_1 m_3 d_1^2 +$$
$$+ m_1 m_3 d_3^2 + \ldots - m_1 m_2 d'^2 - m_1 m_3 d''^2 - \ldots =$$
$$= (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots + m_n d_n^2)\,(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) -$$
$$- m_1 m_2 d'^2 - m_1 m_3 d''^2 - \ldots$$

Sendo:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M,$$

temos:

$$M^2 D^2 = M\,(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots + m_n d_n^2) - m_1 m_2 d'^2 -$$
$$- m_1 m_3 d''^2 - \ldots$$

donde:

$$\text{(a)}\quad D^2 = \frac{M\,(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots + m_n d_n^2) - m_1 m_2 d'^2 - m_1 m_3 d''^2 - \ldots}{M}$$

Esta formula nos dá a distancia do centro de gravidade a um ponto qualquer O do espaço em formação dos quadrados das distancias dos pontos do systema ao mesmo ponto O, e dos quadrados das suas distancias entre si.

Calculando por tres equações como esta as distancias do centro de gravidade a tres pontos do espaço não situados em linha recta, determina-se a posição absoluta desse centro independentemente das coordenadas dos differentes pontos do systema.

A equação *(a)* nos dá :

$$m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots + m_n d_n^2 = \Sigma m d^2 = M D^2 +$$

$$+ \frac{1}{M} (m_1 m_2 d'^2 + m_1 m_3 d''^2 + \ldots)$$

Desta igualdade deduz-se uma propriedade caracteristica do centro de gravidade e que póde mesmo servir-lhe de definição.

O valor do primeiro membro variando apenas com D, pois que o outro termo do segundo membro é constante, o *minimum* de

$$\Sigma m d^2$$

corresponde a

$$D = 0$$

isto é, ao caso em que o ponto a que referem-se as distancias :

$$d_1, d_2, d_3 \ldots$$

coincide com o centro de gravidade.

O centro de gravidade é, pois, o ponto para o qual a somma dos productos dos quadrados de suas distancias :

$$d_1, d_2, d_3 \ldots$$

aos diversos pontos do systema pelas massas respectivas destes pontos

$$m_1, m_2, \ldots m_n$$

é um [illegible].

Si considerarmos a massa constante, o centro de gravidade é o ponto para o qual é um *minimum* a somma dos quadrados de suas distancias a todos os pontos do systema, propriedade, que como vimos, é tambem do centro das médias distancias.

Esta propriedade caracteristica póde ser deduzida directamente como vamos vêr.

Representando por

$$X, \quad Y \quad e \quad Z$$

as coordenadas de um ponto qualquer do espaço, o quadrado das distancias desse ponto a cada um dos pontos do systema tem para para expressão :

$$(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 + (z_1 - Z)^2,$$

$$(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 + (z_2 - Z)^2$$

.....

$$(x_n - X)^2 + (y_n - Y)^2 + (z_n - Z)^2$$

A somma das distancias do ponto considerado a todos os pontos do systema é pois :

$$\Sigma \left[(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 \right]$$

Para determinar o ponto para o qual esta somma é um minimum temos, differenciando em relação a x e igualando a zero o coefficiente differencial :

$$\Sigma\, 2\,(x - X) = 0 \quad , \quad \Sigma\, x = nX\,;$$

multiplicando pelo elemento de massa m, e considerando esta constante temos :

$$\Sigma\, m\, x = X\, n\, m$$

$$X = \frac{\Sigma\, m\, x}{n \times m} = \frac{\Sigma\, m\, x}{M}$$

De modo identico achariamos para

$$Y \text{ e } Z:$$

$$Y = \frac{\Sigma m y}{M}, \quad Z = \frac{\Sigma m z}{M}$$

O ponto para o qual a somma dos quadrados de suas distancias a todos os pontos do systema é um *minimum* é portanto o centro de gravidade cujas coordenadas acabamos de achar.

Uma outra propriedade do centro de gravidade é a que refere-se a sua posição relativamente aos pontos do systema para os quaes esta somma de quadrados das distancias multiplicadas pelas massas correspondentes é constante.

Consideremos um ponto A cujas coordenadas sejam

$$X, \quad Y, \quad Z$$

e para o qual a somma dos quadrados de suas distancias

$$d', \quad d'', \quad d''', \ldots$$

aos n ponto do systema, multiplicadas respectivamente pelas massas desses pontos, seja igual a uma constante C^2, ou:

$$m_1 d'^2 + m_2 d''^2 + m_3 d'''^2 + \ldots = C^2$$

Sendo:

$$d'^2 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2$$

$$d'' = (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 + (Z - z_2)^2$$

.....

temos:

$$m_1 \left[(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2 \right] +$$

$$+ m_2 \left[(X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 + (Z - z_2)^2 \right] + \ldots = C^2$$

De um modo geral:

$$\Sigma m \left[(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2\right] = C^2$$

expressão do logar geometrico de todos os pontos que gosam daquella propriedade.

Desenvolvendo os quadrados e notando que

$$X', \quad Y' \quad \text{e} \quad Z'$$

são factores communs a todos os termos da somma, temos:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)\,\Sigma m + \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 + \Sigma mz^2 - 2\,X\,\Sigma mx -$$
$$- 2\,Y\,\Sigma my - 2\,Z\,\Sigma mz = C^2$$

equação que representa uma esphera cujo centro determina-se igualando a zero os seus coefficientes differenciaes relativamente a X, Y e Z.

Differenciando successivamente em relação a estas tres quantidades temos:

$$X\,\Sigma m - \Sigma mx = o, \qquad Y\,\Sigma m - \Sigma my = o \qquad Z\,\Sigma m - \Sigma mz = o,$$

d'onde:

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \quad Y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad Z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}$$

Todos os pontos para os quaes é constante a somma dos quadrados de suas distancias aos n pontos do systema, respectivamente multiplicados pelas massas destes, constituem, portanto, uma superficie espherica cujo centro é o centro de gravidade do systema.

Considerando o systema constituido não por pontos simples mas por n pontos em grupos de:

$$n_1,\ n_2\ n_3,\ \ldots\ldots\ \underset{n}{n} \text{ pontos.}$$

vamos ver que o seu centro de gravidade gosa da propriedade de ser o mesmo que se todos os pontos de cada grupo estivessem concentrados no centro de gravidade correspondente.

Representando por:

$$x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots\ldots x_n, y_n, z_n$$

as coordenadas dos centros de gravidade dos differentes grupos de pontos, teremos para determinar este centro para cada grupo:

$$x_1 = \frac{\Sigma x'}{n_1}, \quad y_1 = \frac{\Sigma y'}{n_1}, \quad z_1 = \frac{\Sigma z'}{n_1}$$

$$x_2 = \frac{\Sigma x''}{n_2}, \quad y_2 = \frac{\Sigma y''}{n_2}, \quad z_2 = \frac{\Sigma z''}{n_2}$$

$$x_3 = \frac{\Sigma x'''}{n_3}, \quad y_3 = \frac{\Sigma y'''}{n_3}, \quad z_3 = \frac{\Sigma z'''}{n_2}$$

.....

d'onde:

$$nx_1 = \Sigma x', \quad ny_1 = \Sigma y', \quad nz_1 = \Sigma z'$$

$$nx_2 = \Sigma x'', \quad ny_2 = \Sigma y'', \quad nz_2 = \Sigma z''$$

$$nx_3 = \Sigma x''', \quad ny_3 = \Sigma y''', \quad nz_3 = \Sigma z''';$$

sommando membro a membro estas igualdades, temos:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots\ldots + n_n x_n = \Sigma x' + \Sigma x'' + \Sigma x''' + \ldots\ldots = \Sigma x$$

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 + \ldots + n_n y_n = \Sigma y' + \Sigma y'' + \Sigma y''' + \ldots\ldots = \Sigma y$$

$$n_1 z_1 + n_2 z_2 + \ldots\ldots + n_n z_n = \Sigma z' + \Sigma z'' + \Sigma z''' + \ldots\ldots = \Sigma z$$

Sendo as coordenadas do centro de gravidade de todo o systema dadas pelas equações:

$$X = \frac{\Sigma x}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma y}{n}, \quad Z = \frac{\Sigma z}{n},$$

temos:

$$X = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots\ldots + n_n x_n}{n}$$

$$Y = \frac{n_1 x_1 + n_2 y_2 + \ldots + n_n y_n}{n}, \quad Z = \frac{n_1 z_1 + n_2 z_2 + \ldots\ldots + n_n z_n}{n}$$

As coordenadas do centro de gravidade do systema de grupos de pontos são as mesmas, como vemos, que as de um systema de n pontos dos quaes n, tivessem as coordenadas x_1, y_1, z_1, n_2 tivessem as coordenadas x_2, y_2, z_2, etc., isto é, as mesmas que as de um systema constituido pelos centros de gravidade dos differentes grupos, tendo concentrados em si todos os pontos que lhes correspondem.

Suppondo concentrados em cada um dos centros de gravidade dos grupos constituintes do systema um numero qualquer de pontos: n_1, n_2, n_3, etc., e representando por N o numero total de pontos do systema, temos:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots = \Sigma n$$

e as coordenadas do centro de gravidade do systema serão:

$$X = \frac{\Sigma nx}{N}, \quad Y = \frac{\Sigma ny}{N}, \quad Z = \frac{\Sigma nz}{N}$$

Estas formulas, consideradas duas a duas, nos mostram que a projecção do centro de gravidade ou das médias distancias do systema sobre um plano é o centro de gravidade das projecções de todos os pontos do systema sobre o mesmo plano.

Si o plano dos xy, por exemplo, passa pelo centro de gravidade temos:

$$Z = o$$

e, portanto,

$$\Sigma nz = o$$

Sendo o plano coordenado inteiramente arbitrario, conclue-se que é nulla a somma dos momentos de todos os pontos do systema relativamente a qualquer plano passando pelo seu centro de gravidade.

Representando por:

$$x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots\ldots x_n, y_n, z_n$$

as coordenadas dos centros de gravidade dos grupos de pontos, teremos para determinar este centro de todo grupo:

$$x_1 = \frac{\Sigma x}{n_1}, \quad y_1 = \frac{\Sigma y'}{n_1}, \quad z_1 = \frac{\Sigma z'}{n_1}$$

$$x_2 = \frac{\Sigma x}{n_2}, \quad y_2 = \frac{\Sigma y''}{n_2}, \quad z_2 = \frac{\Sigma z''}{n_2}$$

$$x_3 = \frac{\Sigma x}{n_3}, \quad y_3 = \frac{\Sigma y'''}{n_3}, \quad z_3 = \frac{\Sigma z'''}{n_3}$$

.....

donde

$$nx_1 = \Sigma x', \quad ny_1 = \Sigma y', \quad nz_1 = \Sigma z'$$

$$nx_2 = \Sigma x'', \quad ny_2 = \Sigma y'', \quad nz_2 = \Sigma z''$$

$$nx_3 = \Sigma x''', \quad ny_3 = \Sigma y''', \quad nz_3 = \Sigma z''';$$

somando os membros a membro estas igualdades, tem

$$n(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots) = \Sigma x' + \Sigma x'' + \Sigma x''' + \ldots$$

$$n(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots) = \Sigma y' + \Sigma y'' + \Sigma y''' + \ldots$$

$$n(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots) = \Sigma z' + \Sigma z'' + \Sigma z''' + \ldots$$

Se as coordenadas do centro de gravidade de todo o grupo forem X, Y, Z

$$X = \frac{\Sigma x}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma y}{n}, \quad Z = \frac{\Sigma z}{n},$$

$$X = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_n x_n}{n}$$

[illegible]

$$N = n + n + n + \ldots = \Sigma n$$

[illegible] systema serão:

$$X = \frac{\Sigma nx}{N} \quad Y = \frac{\Sigma ny}{N} \quad Z = \frac{\Sigma nz}{N}$$

[illegible] mostram [illegible] ção do centro de gravidade ou das medias dos systema sobre um plano [illegible] centro de gravidade [illegible] bes de todos os pontos do systema sobre o mes-

mo dos xy, por exemplo, passa pelo centro de emos:

$$Z = 0$$

,

$$\Sigma n z = 0$$

[illegible] denado inteiramente arbitrario, com- [illegible] somma dos momentos de todos os [illegible] mente a qualquer plano passando

Si todos os pontos do systema acham-se sobre um dos planos coordenados, o dos $x\,y$, por exemplo, teremos:

$$z_1 = o,\ z_2 = o \ldots\ldots z_n = o$$

e, portanto:

$$\Sigma\, n\, z = o,\ Z = o$$

O centro de gravidade será determinado pelas equações:

$$X = \frac{\Sigma\, n\, x}{\Sigma\, n},\quad Y = \frac{\Sigma\, n\, y}{\Sigma\, n}$$

Sendo o plano dos $x\,y$ inteiramente arbitrario conclue-se que quando os pontos do systema acham-se todos no mesmo plano o centro de gravidade do systema tambem acha-se sobre esse plano.

Finalmente, si todos os pontos do systema acham-se sobre um dos eixos, o dos x, por exemplo, temos:

$$y_1 = o,\ y_2 = o,\ \ldots\ y_n = o,\ z_1 = o,\ z_2 = o,\ \ldots\ z_n = o$$

e, portanto:

$$\Sigma\, n\, y = o,\ Y = o,\ \Sigma\, n\, z = O\ Z = o,$$

sendo o centro de gravidade determinado pela equação:

$$X = \frac{\Sigma\, n\, x}{\Sigma\, n}$$

Como o eixo dos x é inteiramente arbitrario conclue-se que quando todos os pontos do systema — acham-se situados sobre uma mesma recta, o centro de gravidade do systema tambem acha-se sobre essa recta.

Coincidindo o centro de gravidade com o das médias distancias a sua determinação para todos os systemas nas condições que estabelecemos fica reduzida a uma questão puramente geometrica.

Supponhamos em primeiro logar o systema constituido por dous grupos, um de n_1 pontos, tendo o seu centro de gra-

vidade um o_1, e o outro de n_2 pontos tendo o seu centro de gravidade em o_2.

Sendo o centro de gravidade deste systema o mesmo que o de um systema em que os pontos de cada um dos grupos estivessem concentrados no centro de gravidade correspondente, si tomarmos sobre a linha $o_1 o_2$ determinada pelos centros de gravidade dos dous grupos um ponto G que divida essa distancia em partes inversamente proporcionaes ao numero de pontos de cada grupo, teremos:

$$\frac{O_1 G}{O_2 G} = \frac{n_2}{n_1}$$

donde :

$$n_1 \times o_1 G = n_2 \times o_2 G$$

A somma das distancias do ponto G a todos os pontos concentrados em O_1 sendo :

$$n_1 \times G O_1 ,$$

e a somma das distancias do mesmo ponto a todos os pontos concentrado em O_2 sendo :

$$n_2 \times - G O_2 .$$

a somma total das distancias do ponto G a todos os pontos do systema será :

$$n_1 \times G O_1 - n_2 \times G O_2 .$$

Sendo estes dous productos iguaes esta somma é nulla e o ponto G é portanto, o centro das médias distancias ou o centro de gravidade procurado.

O systema considerado pode, pois, ser substituido por um equivalente constituido pelo ponto G no qual se achem concentrados os $n_1 + n_2$ pontos do systema.

O centro de gravidade de um systema de dous grupos de pontos acha-se, pois, sobre a linha determinada pelos centros de gravidade desses grupos e a divide em duas partes inversamente proporcionaes ao numero de pontos dos dous grupos.

Si os numeros de pontos n_1 e n_2 forem iguaes ou si for

$$n_1 = n_2 \quad ou \quad n_1 = 1 = n_2,$$

teremos :

$$G\,O_1 = G\,O_2,$$

o centro de gravidade do systema será o meio da recta determinada pelo centro de gravidade dos dous grupos.

2.º — Consideremos o systema constituido por tres grupos de n pontos cada um, e não situados em linha recta.

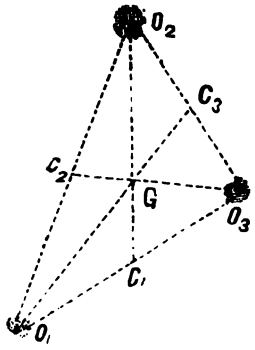


Fig. 57

Os dous grupos, (fig. 57),

$$o_1 \;,\; o_2$$

podem ser substituidos por um unico de $2\,n$ pontos concentrados no seu centro de gravidade c_1, que é o meio da recta

$$o_1 \; o_2 \;.$$

Deste modo fica a questão reduzida a determinar o centro de gravidade dos dous grupos:

$$O_2 = n \text{ e } c_1 = 2\,n,$$

temos pois:

$$\frac{G\,o_2}{G\,c_1} = \frac{2\,n}{n} \;,$$

donde:

$$\frac{G\,o_2}{G\,o_2 + G\,c_1} = \frac{2\,n}{2\,n + n}$$

ou

$$\frac{G\,o_2}{c_1\,o_2} = \frac{2}{3} \;,$$

donde :

$$G\,o_2 = \frac{2}{3}\,c_1\,o_2$$

Este resultado nos mostra que o centro da gravidade do systema acha-se a

$$\frac{2}{3}\,.$$

. linha que une o vertice o_1 ao meio do lado opposto, do .angulo determinado pelos centros de gravidade dos tres ·upos, contados a partir do vertice.

Partindo dos grupos

$$o_2 \text{ e } o_3$$

ı

$$o_1 \text{ e } o_2$$

hegaremos a mesma conclusão relativamente ás medianas radas dos vertices

$$o_1 \text{ e } o_3$$

O centro de gravidade do systema devendo achar-se ɔbre essas tres linhas é determinado pelo cruzamento das res no ponto G.

O centro de gravidade de um sys- ɜma de tres grupos de igual numero de ɔntos acha-se, portanto, no cruzamento ıs tres medianas do triangulo deter- ıinado pelos seus centros de gravidade, ı sobre uma qualquer dellas a

$$\frac{1}{3}$$

ɔ seu cumprimeuto a partir da base.

Este systema póde pois, ser, substi- uido por um outro constituido por um ınico ponto G no qual se achem con- ɜntrados os $3n$ pontos do systema con- ıderado.

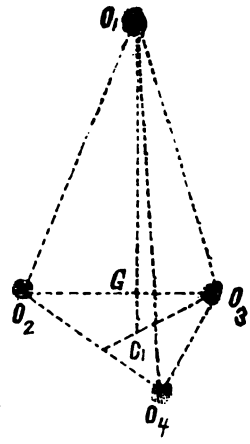


Fig. 58

3.º — Consideremos quatro grupos constituidos por n ɔntos cada um e não existentes no mesmo plano.

Determinando o centro de gravidade c_1 dos tres grupos, ıg. 58).

$$o_2 \text{ , } o_3 \text{ e } o_4$$

ɔdemos substituil-os por um unico grupo de $3n$ pontos con- ɜntrados no ponto c_1.

Deste modo fica a questão reduzida a determinar o centro de gravidade dos dous grupos:

$$o_1 = n \text{ e } c_1 = 3\,n$$

Teremos, pois:

$$\frac{G\,c_1}{G\,o_1} = \frac{n}{3\,n}$$

ou

$$\frac{G\,c_1}{c_1\,o_1} = \frac{n}{4\,n} = \frac{1}{4}$$

donde

$$G\,c_1 = \frac{1}{4}\,c_1\,o_1$$

Este resultado nos mostra que o centro de gravidade procurado acha-se a 1/4 da linha que une o vertice o_1 ao centro da gravidade da base do tetraedro determinado pelos centros de gravidade dos quatro grupos, contado a partir da base.

Si partimos de outros grupos que não

$$O_2,\ O_3,\quad \text{e}\quad O_4$$

chegaremos á mesma conclusão relativamente ás linhas que unem cada um dos outros vertices ao centro de gravidade da base opposta, e como o centro de gravidade do systema deve achar-se sobre essas quatro linhas é determinado pelo cruzamento das quatro.

O centro de gravidade de um systema de quatro grupos de igual numero de pontos e não existentes no mesmo plano acha-se na intersecção das linhas que unem os vertices ao centro de gravidade das bases oppostas do tetraedro determinado pelos centros de gravidade dos grupos, ou sobre uma qualquer dessas linhas a 1/4 de seu comprimento, contado a partir da base.

Este systema póde, pois, ser substituido por um equivalente constituido por um unico ponto G no qual se achem concentrados os $4\,n$ pontos do systema proposto.

to torna-se mais evidente fazendo coincidir a origem das rdenadas com o centro de gravidade do grupo n_1 pois, ste caso, temos:

$$x_1 = o$$

portanto:

$$X = \frac{n_2 \, l}{n_1 + n_2}$$

Fazendo

$$n_1 = n_2$$

mos:

$$X = \frac{l}{2}$$

sto é, o centro de gravidade dos dous grupos de igual nunero de pontos é o meio da recta determinada pelos seus entros de gravidade.

Si em vez de um systema de grupos de pontos considerarmos figuras geometricas, a determinação do centro de gravidade dessas figuras reduz-se, como dissemos, á determinação do centro das médias distancias, desde que se considere cada figura como constituida por um numero de pontos simples proporcional ao seu volume, á sua superficie ou ao seu comprimento.

Si a figura é symetrica em relação a um plano, a simples definição do centro das médias distancias, mostra immediatamente que elle deve achar-se sobre esse plano, si é symetrica em relação a dous planos o centro das médias distancias devendo achar-se sobre os dous está na sua linha de ntersecção ou eixo de symetria, si finalmente a figura é ymetrica relativamente a dous eixos o centro das médias istancias devendo achar-se sobre os dous é determinado elo ponto de cruzamento desses dous eixos.

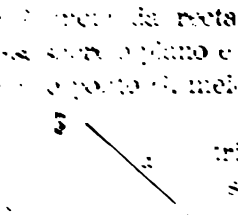
1º — Consideremos o caso o mais simples de uma recta omogenea ou constituida por um numero de pontos proorcional ao seu comprimento.

Tomando o ponto G meio da recta $(a\,b)$, a cada uma das distancias deste ponto aos pontos da parte Gb correspondem uma distancia igual e de signal contrario do mesmo ponto aos pontos da parte Ga, de sorte que a somma das distancias do ponto G a todos os pontos constituintes da recta será nulla.

O ponto G é, portanto, o centro das médias distancias ou centro de gravidade da recta.

O centro de gravidade de uma recta homogenea acha-se no meio da recta e coincide com o centro de gravidade da reunião de dois grupos de igual numero de pontos, que são os centros de gravidade os extremos da recta.

A simples consideração da symetria leva-nos immediatamente a esta conclusão, pois sendo a recta symetrica em relação a um plano que lhe seja perpendicular no meio da recta, e o centro de gravidade devendo estar sobre o plano e sobre a recta é o traço desta com o plano o ponto do meio da recta.



22 — Consideremos um contorno triangular $A\,B\,C$ (fig. 59). Suppondo os pontos de cada um dos lados concentrados no centro da gravidade correspondente a, b, c, fica a questão reduzida a determinar o centro de gravidade das médias distancias dos seus tres grupos de pontos.

Nesse caso temos:

$$\frac{\ldots}{\ldots} = \frac{AC}{\ldots}$$

[illegible] concentrados em c e o centro de gravidade do contorno, este [illegible]

[illegible] nos levará a conclusão [illegible] contorno deve estar

sobre a recta ac''. Devendo este centro achar-se sobre as duas rectas cc' e ac'' é determinado pelo ponto G de crusamento das duas.

Os pontos

$$a, b \text{ e } c$$

dividindo os lados do triangulo em partes iguaes, e sendo essas partes proporcionaes entre si, cada uma das linhas

$$ab, bc \text{ e } ca$$

é parallela e igual á metade do lado do triangulo que lhe corresponde.

Nestas condições a proporção (1) nos dá :

$$\frac{ac'}{bc'} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{ca}{cb}$$

A linha cc' que divide a base do triangulo abc em duas partes proporcionaes aos lados ca e cb, é a bissectriz do angulo em c e, portanto, passa pelo centro do circulo inscripto a esse triangulo.

A linha ac'' achando-se nas mesmas condições relativamente a base cb é a bissectriz do angulo em a e passa tambem por este centro. Devendo este ponto achar-se sobre essas duas linhas é o ponto G de intersecção das duas.

O centro de gravidade do contorno de um triangulo é, pois, o centro do circulo inscripto ao triangulo que se obtem unindo os meios dos seus lados.

3º — Consideremos o contorno

$$A\ B\ C\ D\ E\ F,$$

fig. (60). De um polygono regular.

Tiremos a corda

$$A\ F = c;$$

do ponto o, centro do circulo circumscripto, baixe-se uma

Tomando o ponto G meio da recta
das distancias deste ponto aos pontos da
derá uma distancia igual e de signal
ponto aos pontos da parte Ga, de sorte
distancias do ponto G a todos os pontos
será nulla.

O ponto G é, portanto, o centro das
o centro da gravidade da recta.

O centro de gravidade de uma recta
pois, ao meio da recta e coincide
de um systema de dous grupos de igual
tendo para centro de gravidade os extrem

A simples consideração da symetria
atamente a esta conclusão, pois sendo
relativamente a um plano que lhe seja
ponto G, meio da recta, e o centro de
achar-se sobre o plano e sobre a recta
plano ou o ponto G, meio da recta.

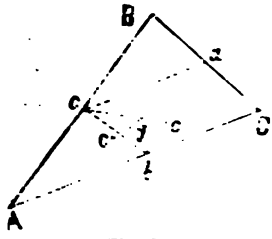


Fig. 5

2) — Consid
triangular ABC
os pontos de
centrados no
respondente
reduzida a
gravidade
desses tres

Determinando o centro para

(1) $$\frac{c'c}{c'b} = \frac{b}{a}$$

Determinando o centro de
de c, e, portanto, o centro de
centro
a linha
Po
o mesm
cluir
gravid

perpendicular ao meio da corda, seja *o H* o eixo dos *y*, e *OX* o eixo dos x, parallelo a *c*.

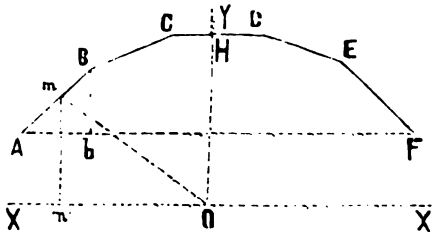


Fig. 60

Suppondo os pontos de cada lado concentrados no centro de gravidade correspondente e representando por :

$$y_1, y_2, y_3 \cdots y_5$$

as coordenadas de cada um desses centros, a somma dos momentos de todas as partes relativamente ao eixo dos *y* será :

$$ly_1 + ly_2 + \ldots\ldots + ly_5$$

sendo *l* o comprimento commum dos lados. A expressão da ordenada do centro de gravidade será :

$$Y = \frac{ly_1 + ly_2 + \ldots\ldots + ly_5}{l_1 + l_2 + \ldots\ldots + l_5} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_5}{5}$$

Unindo o ponto *O* ao ponto *m*, meio de um dos lados *AB*, representando o apothema ou raio do circulo inscripto *Om* por *R*, e projectando *AB* sobre a corda, os dous triangulos semelhantes :

$$AbB \text{ e } om\ m'$$

nos dão :

$$\frac{mm'}{Ab} = \frac{mO}{AB} = \frac{R}{l}$$

ou

$$\frac{y_1}{Ab} = \frac{R}{l},$$

donde :

$$y_1 = \frac{R}{l}\ Ab$$

Chegando-se a uma fórmula semelhante para cada um dos outros lados, conclue-se que a ordenada do centro de

ıvidade de cada um dos lados é igual á projecção desse lo sobre a corda multiplicada pela relação constante:

$$\frac{R}{l}$$

A somma de todas essas projecções sendo igual ao comrimento da corda, c, temos:

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_5 = \frac{R}{l} c$$

Substituindo este valor na expressão de Y, temos :

$$Y = \frac{c}{5\,l} R$$

Sendo a recta oY um eixo de symetria do contorno, o centro e gravidade deve achar-se sobre esse eixo e, portanto, a istancia Y deve ser contada sobre elle a partir de O para H.

Para um numero qualquer n de lados teriamos:

$$Y = \frac{c}{nl} R$$

A distancia do centro de gravidade de uma porção do ontorno de um polygono regular ao centro do circulo cirumscripto, é, pois, uma quarta proporcional ao raio do ırculo inscripto ou apothema R do polygono, a corda c e ao ɔmprimento do contorno nl.

A determinação que acabamos de fazer podia ser obtida ırectamente considerando os pontos constituintes dos lados ɔncentrados nos centros de gravidade correspondentes e eterminando como anteriormente o centro de gravidade esse systema de n pontos.

4º — Consideremos o contorno $ABCDEF$ de um ɔlygono regular de numero par de lados. (fig. 61.)

Suppondo os pontos constituintes de cada um dos lados ɔncentrados nos centros de gravidade correspondentes

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

T... o H o eixo dos y, e OX

das dis...

derá ...

ponto ...

distâ...

será ...

Suppondo os pontos de cada lado concentrados no centro de gravidade correspondente e representando por :

$$y_1, y_2, y_3 \cdots y_5$$

as coordenadas de cada um desses centros, a ...ias as partes relativamente ao

$$l_2 + \ldots\ldots + ly_5$$

...mum dos lados. A expressão da ...gravidade será :

$$\frac{\ldots + ly_5}{\ldots + l_5} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_5}{5}$$

...ponto m, meio de um dos lados ...ema ou raio do circulo inscripto ...AB sobre a corda, os dous trian-

...B e ...$m\ m'$

$$\ldots \frac{mO}{AB} = \frac{R}{l}$$

$$\ldots = \frac{R}{l},$$

$$\ldots = \frac{R}{l} Ab$$

...formula semelhante para cada um ...esse que a ordenada do centro de

gravidade de cada um dos lados é igual á projecção desse lado sobre a corda multiplicada pela relação constante:

$$\frac{R}{l}$$

A somma de todas essas projecções sendo igual ao comprimento da corda, c, temos:

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_5 = \frac{R}{l} c$$

Substituindo este valor na expressão de Y, temos :

$$Y = \frac{c}{5\,l} R$$

Sendo a recta oY um eixo de symetria do contorno, o centro de gravidade deve achar-se sobre esse eixo e, portanto, a distancia Y deve ser contada sobre elle a partir de O para H.

Para um numero qualquer n de lados teriamos:

$$Y = \frac{c}{nl} R$$

A distancia do centro de gravidade de uma porção do contorno de um polygono regular ao centro do circulo circumscripto, é, pois, uma quarta proporcional ao raio do circulo inscripto ou apothema R do polygono, a corda c e ao comprimento do contorno nl.

A determinação que acabamos de fazer podia ser obtida directamente considerando os pontos constituintes dos lados concentrados nos centros de gravidade correspondentes e determinando como anteriormente o centro de gravidade desse systema de n pontos.

4º — Consideremos o contorno $ABCDEF$ de um polygono regular de numero par de lados. (fig. 61.)

Suppondo os pontos constituintes de cada um dos lados concentrados nos centros de gravidade correspondentes

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

Para um outro elemento teriamos:

$$y_2 \times a' b' = b' a'' \times R$$

e assim por diante.

Representando por Y a ordenada do centro de gravidade do arco a, o seu momento será: $Y \times a$, portanto:

$$Y \times a = R\,(b\,a' + b'\,a'' + b''\,a''' + \ldots\ldots)$$

Sendo a quantidade comprehendida no parenthesis somma das projecções de todos os elementos lineares do arco sobre a corda e, portanto, o comprimento desta, temos

$$Y = \frac{c \times R}{a}$$

O eixo $O\,Y$ sendo um eixo de symetria do arco, o centro de gravidade deve achar-se sobre esse eixo e, portanto, a distancia Y deve ser contada sobre elle a partir de O para C.

A distancia do centro de gravidade de um arco de circulo ao centro do mesmo circulo é, pois, uma quarta proporcional ao raio, á corda e ao comprimento do arco.

Podiamos chegar a este resultado no caso anterior considerando que um arco de circulo póde ser assimilado a um contorno polygonal regular em que o apothema é o raio do circulo, á corda do contorno, a corda do arco e o comprimento do contorno o arco rectificado.

Si o arco fôr uma semicircumferencia, temos:

$$a = \pi R\,, \quad c = 2\,R$$

e, portanto:

$$Y = \frac{2}{\pi}\,R$$

No caso da circumferencia inteira, considerando os pesos constituintes de cada semi-circumferencia concentrados no centro de gravidade correspondente, ficará a questão reduzida

de gravidade respectivo, o centro de gravidade do systema ou do contorno polygonal será determinado pelas coordenadas:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots + m_{n'} x_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots\ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n}$$

53º — Consideremos um arco de circulo $A\ B\ C = a$, de raio $O\ C = R$, tire-se a corda $A\ B = c$; do centro do circulo baixe-se a perpendicular $O\ Y$ ao meio da corda, e sejam $O\ Y$ e $O\ X$, parallela a c, dous eixos coordenados (Fig. 62).

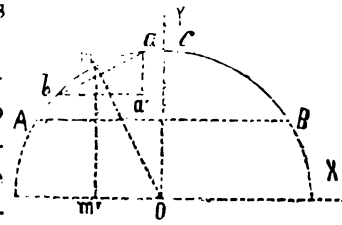


Fig. 62

Dividindo o arco em elementos lineares ab, suppondo cada um desses elementos constituido por um numero de pontos proporcional ao seu comprimento commum e concentrados no centro de gravidade correspondente, no meio do elemento portanto, temos para expressão do momento de um delles: $a\ b$:

$$a\ b \times m\ m' = a\ b \times y_1\ ;$$

para um outro teriamos:

$$a'\ b' \times y_2,$$

e assim por diante.

Os triangulos semelhantes: aba' e omm' nos dão:

$$\frac{m\ m'}{b\ a'} = \frac{o\ m}{b\ a} \quad \text{ou} \quad \frac{y_1}{ba'} = \frac{R}{c\ b}\ .$$

donde

$$y_1 \times a\ b = b\ a' \times R$$

erminar o centro de gravidade desses dous grupos de numero de pontos, que é o meio da distancia entre os e sendo essas distancias:

$$\frac{2}{\pi} R \quad \text{e} \quad -\frac{2}{\pi} R$$

o será zero, isto é, o centro de gravidade da circumfe-
a achará no centro do circulo.

studada a determinação do centro das médias distancias centro de gravidade relativamente ás linhas vamos mos a pratica relativamente ás superfices.

— Consideremos um triangulo ABC (Fig. 63). ppondo a sua superficie dividida em elementos su- es parallelos a base BC, por exemplo, o centro de de cada um desses elemen- á o meio da recta a que elle se no limite, e como a me- AD divide ao meio todas as parallelas á base BC, os centros idade de todos os elementos ntes do triangulo e, portanto, n o centro de gravidade do tri- se acharão sobre essa linha.

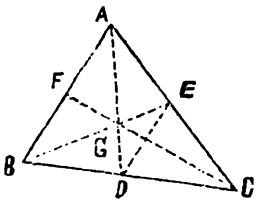


Fig. 63

o mesmo raciocinio chegamos á conclusão que o de gravidade do triangulo deve achar-se tambem s medianas

$$C\,F \quad \text{e} \quad B\,E.$$

, si o centro de gravidade da superficie deve achar-se essas tres linhas é elle determinado pelo ponto G de ção das tres.

indo D a E, a linha DE dividindo os lados

$$A\,C \quad \text{e} \quad B\,C$$

tes iguaes e proporcionaes, é igual e parallela á do lado AB.

Determinando os centros de gravidade dos triangulos

$$A\ C\ D \quad \text{e} \quad A\ B\ C,$$

e suppondo os pontos constituintes desses triangulos concentrados nesses centros c e c', o centro de gravidade do trapezio se achará sobre a linha $c\ c'$.

A mediana $E\ F$ dividindo em partes iguaes todas as parallelas ás bases, é um eixo de symetria da figura e, portanto, sobre ella deve achar-se tambem o centro de gravidade.

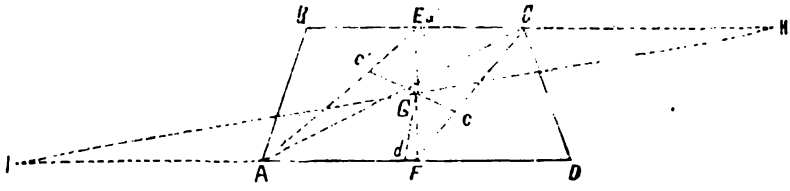


Fig. 65

Este ponto devendo estar sobre essas duas linhas é determinado pelo ponto G de intersecção das duas.

Representando por B e b as duas bases parallelas, por h a altura do trapezio e por x e y as distancias do centro de gravidade G ás duas bases, temos:

$$h = x + y.$$

Os triangulos

$$A\ B\ C \quad \text{e} \quad A\ C\ D$$

tendo a mesma altura são proporcionaes ás suas bases b e B, e o trapezio cuja superficie é igual a somma das superficies desses triangulos é proporcional a $b + B$.

Sendo a distancia de c á base B igual a

$$\frac{1}{3}\,h,$$

e a distancia de c' á mesma base igual a

$$\frac{2}{3}\,h$$

temos :

$$x\left(B+b\right)=B\times\frac{h}{3}+b\times\frac{2}{3}h,$$

donde :

$$x=\frac{h}{3}\cdot\frac{B+2b}{b+B}.$$

Para a distancia y do centro de gravidade a base b, teriamos :

$$y=\frac{h}{3}+\frac{b+2B}{b+B}.$$

Destas expressões das distancias do centro de gravidade ás duas bases parallelas deduz-se um meio simples de determinal-o geometricamente.

Dividindo membro a membro as duas igualdades, temos:

$$\frac{x}{y}=\frac{B+2b}{b+2B}=\frac{\frac{B}{2}+b}{\frac{b}{2}+B}$$

Si prolongarmos a base b e tomarmos

$$CH=B,$$

e si prolongarmos a base B em sentido contrario e tomarmos

$$AI=b,$$

unindo os pontos I e H, o ponto de intersecção G desta linha com a mediana é o centro de gravidade do trapezio.

Porque tirando por G uma perpendicular dd' ás duas bases, temos :

$$Gd+Gd'=h=x+y \qquad \frac{Gd}{Gd'}=\frac{FI}{EH}$$

Sendo

$$FI=b+\frac{B}{2} \quad e \quad EH=B+\frac{b}{2},$$

temos :

$$\frac{Gd}{Gd'}=\frac{b+\frac{B}{2}}{B+\frac{b}{2}}=\frac{x}{y}$$

portanto

$$x=Gd \ e \ y=Gd'$$

Substituindo esta relação no valor de Y, temos :

$$Y = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{a} R$$

Sendo o raio $C\ D$, perpendicular ao meio da corda, um eixo de symetria, o centro de gravidade da recta deve achar-se sobre essa linha a uma distancia Y do centro do circulo.

Si o sector é um semicirculo temos : $a = \pi$, $R\ C = 2\ R$ e, portanto :

$$Y = \frac{4\ R}{3\ \pi\ R} R = \frac{4}{3\ \pi} R$$

3º — Para determinar o centro de gravidade do segmento $A\ D\ B$, sendo este igual á differença entre o sector e o triangulo $A\ B\ C$ o seu momento será igual á differença dos momentos dos dous.

Representando por S e Y a sua superficie e a distancia do seu centro de gravidade a um eixo parallelo á corda e passando pelo centro do circulo, por S_1 e Y_1 e S_2 e Y_2, as quantidades correspondentes relativas ao sector e ao triangulo, temos :

$$S \times y = S_1 \times Y_1 - S_2 \times Y_2,$$

mas sendo :

$$S_1 = \frac{1}{2}\ a\ R, \quad Y_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{a} R$$

$$S_2 = \frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}, \quad Y_2 = \frac{2}{3} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}},$$

temos, substituindo :

$$S\ y = \frac{1}{2}\ a\ R \times \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{a} R - \frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} \times \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c^3}{12},$$

donde:

$$y = \frac{c^3}{12\,s}$$

isto é, a distancia do centro de gravidade do segmento circular ao centro do circulo, contada sobre o eixo de symetria OD, é igual ao cubo da corda, dividido por doze vezes a área do segmento.

6º — Consideremos a superficie de um cone recto.

Dividindo essa superficie em elementos triangulares, tendo para vertice commum o vertice do cone e para base os elementos lineares da circumferencia da base do cone, os centros de gravidade de todos esses elementos se acharão em um plano parallelo á base a $^1/_3$ da altura.

Suppondo os pontos componentes de cada um desses elementos concentrados no centro de gravidade correspondente, e constituindo estes os pontos da circumferencia intersecção do plano parallelo com a superficie do cone, fica a questão reduzida a determinar o centro de gravidade desta circumferencia, e achando-se este ponto no centro do circulo, o centro de gravidade da superficie do cone é o ponto do eixo que fica distante da base a $^1/_3$ da altura.

7º — Consideremos a superficie de um cylindro recto de base circular. Suppondo essa superficie dividida em elementos rectangulares tendo para bases os elementos lineares das circumferencias das bases do cylindro, os centros de gravidade de todos esses elementos se acharão em um plano parallelo á base, passando pelo meio da altura.

Suppondo os pontos componentes de cada um dos elementos concentrados no centro de gravidade correspondente, e constituindo estes a circumferencia intersecção do plano parallelo com a superficie do cylindro, fica a questão reduzida a determinar o centro de gravidade desta circumferencia, e achando-se este ponto no centro do circulo, o centro de gravidade da superficie cylindrica é o ponto meio da altura ou do eixo.

88 — Consideremos uma zona espherica *A B C D* (fig. 68).

Suppondo a sua superficie dividida em zonas elementares iguaes em altura e parallelas ás bases, todos esses elementos serão equivalentes em superficie, e portanto constituidos por um mesmo numero de pontos, pois todos elles tendo a mesma altura, têm para medida da superficie o producto da circumferencia de um circulo maximo pela altura.

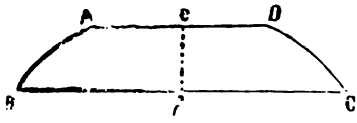


Fig. 68

No limite, reduzindo-se cada um desses elementos a uma circumferencia terá o seu centro de gravidade sobre a altura *ef*.

Suppondo os pontos componentes de cada uma destas circumferencias concentrados no seu centro de gravidade, e constituindo todos esses centros a recta *ef*, fica a questão reduzida a determinar o centro de gravidade desta linha, e sendo este ponto o meio da recta, o centro de gravidade da zona espherica acha-se no meio da sua altura.

Consideremos, finalmente, a determinação do centro de gravidade ou das médias distancias dos volumes:

1º — Supponhamos que a figura dada seja um parallelipipedo.

Considerando-o dividido em secções elementares parallelas a uma das faces, os centros de gravidade de todos esses elementos constituirão a linha que une os centros das duas faces oppostas.

Suppondo os pontos constituintes dos elementos concentrados nos centros de gravidade correspondentes, fica a questão reduzida a determinar o centro de gravidade dessa recta, e achando-se este ponto no meio da recta, o centro de gravidade do parallelipipedo é o meio da recta que une os centros de duas bases oppostas, e portanto o ponto de intersecção de suas diagonaes.

2º — Consideremos um prisma qualquer de bases pa-
as.
determinando os centros de gravidade das bases e unindo
dous pontos, esta linha conterá os centros de gravidade
das as secções elementares feitas parallelamente ás
e, portanto, o centro de gravidade do prisma.
Suppondo os pontos constituintes de todos esses ele-
os concentrados nos centros de gravidade correspondenica a questão reduzida a determinar os centros de grale da linha que une os centros de gravidade das bases, e
ndo-se este ponto no meio dessa linha, o centro de
dade do prisma está no meio da linha que une os centros
gravidade das duas bases.
Podendo um cylindro de bases parallelas ser sempre assi-
lo a um prisma, o centro de gravidade do cylindro
-se no meio de linhas que une os centros de gravidade
suas bases.
3º — Consideremos um tetraedro $A\,B\,C\,D$, (fig. 69).
Determinando o centro de gravidade c' de uma das suas
$B\,D\,C$, por exemplo, e unindo esse ponto ao vertice A,
ha Ac' passará pelos centros de gra-
le de todas as secções elementares
llelas á base $B\,D\,C$.
Suppondo os pontos constituintes
es elementos concentrados nos seus
os de gravidade, fica a questão redu-
a determinar o centro de gravidade
recta $A\,C$ que conterá, portanto, o
ro de gravidade do tetraedro.

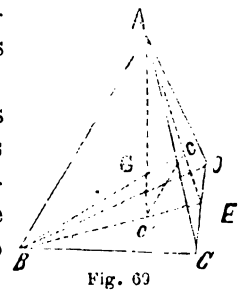


Fig. 69

Determinando o centro de gravidade c da face CAD e
ndo-o ao vertice B, o mesmo raciocinio nos levará a
luir que o centro de gravidade do tetraedro deve achar-
obre a recta Bc.
Devendo este ponto estar sobre as duas rectas: Ac' e
existentes no plano AEB, é elle determinado pelo ponto
intersecção das duas.

os centros de gravidade de todas as secções ele-
s feitas parallelamente a base da pyramide contêm
de gravidade desta, e devendo este ponto achar-se
no plano parallelo á base, que contêm os centros
idade dos tetraedros constituintes da pyramide,
terminado pelo ponto G de intersecção da linha
plano.

ntro de gravidade de uma pyramide acha-se, pois,
linha que une o vertice ao centro de gravidade da
ma distancia desta igual a $^1/_4$ dessa linha.

cone, podendo ser sempre assimilado a uma pyra-
n o seu centro de gravidade sobre a linha que une
ao centro de gravidade da base, distante desta de
linha.

Consideremos, finalmente, um sector espherico A, B,
71).

ondo-o dividido em elementos pyramidaes, e os
estes elementos concentrados nos seus centros de
le, todos estes pontos constituirão
a espherica abc de raio igual a $^3/_4$
da esphera, e a questão fica assim
a determinar o centro de gravidade
na. Achando-se este ponto na me-
altura da zona, o centro de gravi-
sector acha-se sobre o seu eixo e

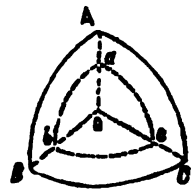


Fig. 71

listancia do centro da esphera igual a $^3/_4$ do raio,
metade da altura da zona que nesse sector passa a
ancia do centro.

eoria dos centros de gravidade estende-se aos sys-
u corpos materiaes constituidos por um numero
o de moleculas, suppondo-se a repartição destas
ada a uma certa lei, considerada geralmente uni-

as condições suppondo o corpo dividido em ele-
de volume $\triangle x\ \triangle y\ \triangle z$, cada elemento conterá um
de moleculas igual ao que suppõe-se constituir a

unidade de volume, multiplicado pelo volume desse elemento ou por $\triangle x \ \triangle y \ \triangle z$.

Fazendo tender esses elementos não para zero, mas para um limite infinitamente pequeno $dx \ dy \ dz$, no qual cada um contenha apenas uma molecula, por exemplo, as fórmulas do calculo integral serão applicaveis as determinações dos centros de gravidade dos corpos, por este modo referida a determinação do centro de gravidade de um systema de pontos.

Si o solido não é homogeneo, isto é, si a repartição das moleculas não é uniforme, é necessario suppôr conhecido para cada elemento infinitesimal o numero moleculas contidas na unidade de volume ou a sua densidade δ, cujo peso δ_0 considera-se variando gradualmente de um ponto a outro do systema e, portanto, como uma formação continua das suas coordenadas.

Supponhamos um corpo homogeneo referido a tres eixos rectangulares.

Considerando um elemento

$$dx \ dy \ dz$$

de seu volume, a differença entre a posição de um qualquer dos pontos deste elemento e a do seu centro de gravidade póde ser deprezada, de maneira a nos permittir considerar como coordenadas do centro de gravidade do elemento de volume as coordenadas

$$x_1, \quad y_1 \quad \text{e} \quad z_1$$

de qualquer de seus pontos.

Concebendo concentradas nos respectivos centros de gravidade as moleculas de cada um dos elementos de volume, teremos para expressão do volume do corpo e das coordenadas do seu centro de gravidade ou do centro de gravidade do conjuncto de grupos de pontos, constituidos pelos centros

de gravidade de todos os elementos em que se considere dividido o corpo :

$$V = \iiint dx \; dy \; dz$$

$$\text{(a)} \quad X = \frac{\iiint x \, dx \, dy \, dz}{V}, \quad Y = \frac{\iiint y \, dx \, dy \, dz}{V},$$

$$Z = \frac{\iiint z \, dx \, dy \, dz}{V}.$$

Para calcular estas expressões integra-se primeiro relativamente a z, considerando-se x e y constantes, entre os limites:

$$z = f\left(x, y\right), \qquad z = f_1\left(x, y\right),$$

depois integra-se em relação a y, considerando x constante, entre os limites:

$$x = \varphi\left(x\right), \qquad y = \varphi_1\left(x\right);$$

finalmente integra-se em relação a x entre os limites:

$$x = \alpha, \qquad x = \beta.$$

Si o solido não é homogeneo, o peso do numero de moleculas de cada um dos seus elementos terá para expressão:

$$\delta_0 \quad dx \quad dy \quad dz.$$

Considerando as moleculas de cada elemento concentradas no respectivo centro de gravidade, teremos para ex-

pressão geral do peso M_p do systema, e para equações das coordenadas do seu centro de gravidade:

$$M_p = \int\int\int \delta_0 \, dx \, dy \, dz$$

$$X = \frac{\int\int\int \delta_0 \, dx \, dy \, dz \times x}{M_p}$$

$$Y = \frac{\int\int\int \delta_0 \, dx \, dy \, dz \times y}{M_p}$$

$$Z = \frac{\int\int\int \delta_0 \, dx \, dy \, dz \times z}{M_p}$$

Si, por analogia, denominarmos momento de uma massa, relativamente a um plano, o producto dessa massa pela distancia de seu centro de gravidade ao plano considerado, das tres ultimas equações deduz-se que os momentos da massa de um corpo relativamente a tres planos coordenados é igual á somma dos momentos de seus elementos relativamente aos mesmos planos.

Em muitos casos é preferivel utilisar as equações do centro de gravidade correspondentes a coordenadas polares.

Referindo o corpo a este systema de coordenadas, chamando ρ o raio vector, ψ o angulo formado pelo plano dos xz com o plano passando pelo eixo dos z e ρ, θ o angulo formado pelo raio vector com o eixo dos z, o elemento de volume do corpo terá, como sabe-se, para expressão:

$$\rho^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\rho \, d\psi$$

Por conseguinte o peso do elemento de massa será:

$$\delta_0 \, \rho^2 \, sen \, \theta \, d\theta \, d\rho \, d\psi,$$

sendo δ_0 o peso na unidade de volume do corpo, no ponto considerado, e achando-se as coordenadas rectangulares e polares ligadas pelas relações:

$$x = \rho \, sen \, \theta \, cos \, \psi \, , \quad y = \rho \, sen \, \theta \, sen \, \psi \, , \quad z = \rho \, cos \, \theta$$

Substituindo estes valores nas expressões precedentes, temos:

$$Mp = \int\int\int \delta_0 \, \rho^2 \, sen \, \theta \, d\theta \, d\rho \, d\psi$$

$$X = \frac{\int\int\int \delta_0 \, \rho^3 \, sen^2 \, \theta \, cos \, \psi \, d\theta \, d\rho \, d\psi}{M_p}$$

$$Y = \frac{\int\int\int \delta_0 \, \rho^3 \, sen^2 \, \theta \, sen \, \psi \, d\theta \, d\rho \, d\psi}{M_p}$$

$$Z = \frac{\int\int\int \delta_0 \, \rho^3 \, sen \, \theta \, cos \, \theta \, d\theta \, d\rho \, d\psi}{M_p}$$

Si o corpo é homogeneo o factor δ_0 será constante e neste caso o δ_0 do denominador se simplificará com o factor correspondente do numerador.

Relativamente aos limites das integraes, a questão depende da situação da origem das coordenadas, que póde achar-se fóra ou no interior do corpo considerado.

Si a origem for um ponto desse corpo, a integração far-se-ha primeiramente desde $\rho = 0$ até $\rho = K$, sendo K uma formação de θ e ψ dada pela equação da superficie do corpo;

depois se integrará desde $\theta = 0$ e $\psi = 0$ até $\theta = \pi$ e $\psi = 2\pi$, começando-se indifferentemente por θ ou por ψ.

Si a origem for exterior ao corpo, os limites geralmente serão mais complicados. Representando neste caso por α e α_1 duas formações dadas de θ e ψ, por β e β_1, duas formações de ψ e por ν e ν' dous angulos dados; supponhamos que se trata, por exemplo, de uma porção do corpo comprehendida de uma parte entre duas superficies representadas pelas equações:

$$\rho = \alpha, \qquad \rho = \alpha_1 ;$$

e de outra parte entre duas superficies conicas cujo eixo commum seja o eixo dos z, e vertice commum a origem, representadas pelas equações:

$$\theta = \beta, \qquad \theta = \beta_1 ;$$

finalmente, limitada por dous planos passando pelo eixo de z e formando os angulos ν e ν' com o plano dos xz d'onde é contado o angulo ψ.

Integra-se primeiramente desde $\rho = \alpha$, até $\rho = \alpha_1$, depois desde $\theta = \beta$ até $\theta = \beta_1$ e por ultimo desde $\psi = \nu$ até $\psi = \nu_1$.

Determinadas as coordenadas rectangulares por esta fórma as coordenadas polares do centro de gravidade serão dadas pela expressão:

$$\rho^2 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad tg\,\psi = \frac{Y}{X}, \quad cos\,\theta = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

As formulas *(a)* das coordenadas do centro de gravidade simplificam-se modificando-se a concepção geometrica destinada a decompor o volume considerado em elementos infinitesimaes.

Para isto, em vez de decompormos o volume em elementos infinitesimaes em todos os sentidos, divide-se por planos parallelos a um dos planos coordenados, e distantes uns dos outros de uma quantidade infinitamente pequena, determi-

na-se a distancia do centro de gravidade a esse plano e repete-se a operação para com os dous outros planos coordenados. Supponhamos o volume dividido por planos parallelos ao plano dos yz; representando por A a área, variavel com x, de uma das camadas assim obtidas, isto é, fazendo:

$$A = \int z\, dy,$$

o volume da camada será:

$$A\, dx\ ;$$

e teremos assim para o volume total e para expressão da distancia do centro de gravidade ao plano yz:

$$V = \int A\, dx$$

$$X = \frac{\int Ax\, dx}{V}$$

Procedendo de modo analogo para com planos parallelos ao plano dos xz teriamos:

$$A_1 = \int z\, dx$$

$$V = \int A_1\, dy$$

$$Y = \frac{\int A_1\, y\, dy}{V}$$

e do mesmo modo com o terceiro plano.

Mediante esta modificação da concepção geometrica fundamental, a questão fica referida algebricamente ao calculo de integraes simples, as quaes, desde que não possam ser exactamente avaliadas, poderão ser obtidas por approximação.

O modo de geração do volume e a situação dos eixos coordenados podem ainda simplificar as expressões algebricas das coordenadas do seu centro de gravidade.

Consideremos um solido de revolução ou o volume gerado por uma superficie plana, comprehendida entre duas curvas, gyrando em torno do eixo dos x, estando os eixos situados no plano da superficie. Tirando duas ordenadas infinitamente proximas y e y_1 na curva superior, a estas corresponderão na curva inferior as ordenadas y' e y_1'.

O volume gerado pela superficie elementar, limitada por essa ordenada na superficie dada, póde ser considerado como a differença entre os volumes de dous cylindros tendo dx para altura commum e para bases os circulos descriptos com raios iguaes a y e y', e terá para expressão:

$$\pi (y^2 - y'^2) dx.$$

O volume total e o centro de gravidade serão dados neste caso, pelas equações:

$$V = \pi \int_a^b (y^2 - y'^2) dx.$$

$$X = \frac{\pi \int_a^b x (y^2 - y'^2) dx}{V}$$

sendo a e b os valores de x correspondentes ás ordenadas limites da área geratriz do volume, e X a distancia do centro de gravidade á origem, contada sobre o eixo dos x, onde deve achar-se esse centro em virtude da symetria do volume em relação ao eixo.

Si a curva inferior que limita a superficie considerada é supposta coincidir com o eixo de revolução, teremos: $y' = o$, e, neste caso:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx,$$

$$X = \frac{\int y^2 x \, dx}{\int y^2 \, dx}.$$

Consideremos a determinação do centro de gravidade das superficies, isto é, dos volumes nos quaes uma das dimensões é supposta infinitamente pequena relativamente ás outras duas.

Como sabemos, o elemento differencial de uma superficie:

$$y = f(x, y)$$

nos é dado pela fórmula:

$$dx \, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

sendo p e q respectivamente as derivadas:

$$\frac{dz}{dx} \text{ e } \frac{dz}{dy}$$

A massa total e as coordenadas do centro de gravidade serão, pois, para este caso:

$$M_p = \int\int \delta_0 \, dx \, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$X = \frac{\iint x \, \delta_0 \, dx \, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{M_p},$$

$$Y = \frac{\iint y \, \delta_0 \, dx \, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{M_p},$$

$$Z = \frac{\iint z \, \delta_0 \, dx \, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{M_p}.$$

Si a superficie for homogenea o factor δ desapparecerá como nos casos anteriores. Quanto aos limites, designando por:

$$y = \varphi(x), \quad y = \varphi_1(x)$$

os valores de y correspondentes a dous pontos que sobre a projecção do contorno da superficie no plano xy, tem a mesma obcisa x, é necessario integrar primeiramente em relação a y, considerando x constante desde

$$y = \varphi(x),$$

até

$$y = \varphi_1(x);$$

e despois em relação a x desde

$$x = a,$$

até

$$x = b,$$

sendo

$$x = a \text{ e } x = b$$

as equações de dous planos parallelos ao plano zy, passando pelos pontos extremos do contorno, e considerando a menor que b.

Si a superficie de que se trata for plana, temos, tomando seu plano para plano dos xy:

$$Z = o, \quad p = o, \quad q = o,$$

donde:

$$M_p = \iint \delta_o \, dx \, dy,$$

$$X = \frac{\iint \delta_o \, x \, dy \, dx}{M_p}$$

$$Y = \frac{\iint \delta_o \, y \, dy \, dx}{M_p}$$

Consideremos uma superficie de revolução, isto é, uma superficie gerada pelo movimento de uma curva em torno de um eixo situado em seu plano.

Fazendo coincidir este eixo com o eixo dos x e tirando duas ordenadas da curva geratriz infinitamente proximas, a superficie gerada pelo arco *ds* da curva, comprehendida por essas ordenadas, póde ser considerada como a de um tronco de cone cuja área terá para expressão:

$$2 \pi y \, ds$$

O centro de gravidade devendo achar-se sobre o eixo de revolução e considerando-se a superficie homogenea, teremos para determinar esse centro:

$$S = 2 \pi \int_a^b y \, ds \, ,$$

$$X = \frac{2 \pi \int_a^b y \, ds}{S}$$

Vejamos, finalmente, a questão relativamente ás linhas ou volumes tendo duas das suas dimensões infinitamente pequenas em relação a terceira.

O elemento differencial dessa linha nos é dado, como sabe-se, pela expressão:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

representando por

$$x' \text{ e } x''$$

as abcissas correspondentes aos pontos extremos.

A ordenada do centro de gravidade da linha geratriz tendo para expressão:

$$Y = \frac{\int_{x''}^{x'} y\, ds}{l},$$

si substituirmos a integral pelo seu valor (1), teremos:

$$S = 2\pi Y l$$

Traduzida em linguagem vulgar esta expressão nos mostra ser a superficie de revolução igual ao producto da circumferencia

$$2\pi Y$$

descripta pelo centro de gravidade da linha geratriz, pelo comprimento l desta linha.

Si em vez de fazer uma revolução completa, a geratriz gyra apenas de um angulo α, a superficie correspondente S' estará para a superficie S na relação de α para 2π, isto é:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

donde:

$$S' = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot S$$

Substituindo S pelo seu valor, resulta:

$$S' = l Y \alpha$$

isto é, a superficie descripta é, neste caso, igual ao producto da geratriz pelo arco descripto pelo seu centro de gravidade.

Considerando o volume gerado pela revolução de uma superficie plana limitada por duas curvas e pelas ordenadas correspondentes as abcissas

$$x' \text{ e } x''$$

esse volume terá para expressão:

$$V = \pi \int_{x''}^{x'} (y^2 - y'^2)\, dx$$

A ordenada do centro de gravidade da superficie geratriz tendo para expressão :

$$Y = \frac{1}{2} \frac{\int_{x''}^{x'} (y^2 - y'^2)\, dx}{S},$$

por ser

$$\frac{y + y'}{2}$$

a ordenda y que, na fórmula geral, representa a ordenada do centro de gravidade do elemento da superficie.

Si substituirmos a integral do numerador pelo seu valor deduzido da primeira fórmula, temos:

$$2\, S\, Y = \frac{V}{\pi},$$

donde:

$$V = 2\, \pi\, Y.\, S$$

O volume de revolução é, pois, igual ao producto da superficie geratriz pela circumferencia descripta pelo seu centro de gravidade.

Si a revolução for apenas de um angulo α, temos:

$$V' = \alpha\, Y.\, S.$$

De um modo geral, portanto, a superficie ou o volume de revolução é igual ao producto da linha ou superficie geratriz pelo caminho, que percorre o seu centro de gravidade.

Por este modo fica a quadratura ou cubatura dependendo unicamente do conhecimento do centro de gravidade da geratriz.

Reciprocamente, conhecida a superficie ou o volume gerado, póde-se determinar o centro de gravidade da linha ou superficie geratriz.

No caso de um cylindro recto truncado, póde-se fazer depender a avaliação do volume da posição dos centros de gravidade das bases.

Considerando a base do cylindro coincidindo com o plano dos xy e, portanto, as suas geratrizes perpendiculares a este plano, suppondo a base dividida em elementos $dx\,dy$; e o volume constituido por elementos com bases $dx\,dy$ e altura z, o volume de um desses elementos terá para expressão:

$$z\,dx\,dy,$$

e o volume total será, pois:

$$V = \iint z\,dx\,dy$$

Representando por α a inclinação da secção obliqua sobre a base, cada elemento da base oblíqua terá para expressão

$$\frac{z\,dx\,dy}{\cos\alpha}$$

e o seu momento, relativamente ao plano da outra, será

$$\frac{z^2\,dx\,dy}{2\cos\alpha}$$

Representando por A a área da base, a área da secção obliqua será:

$$\frac{A}{\cos \alpha},$$

e sendo Z a ordenada do seu centro de gravidade, temos:

$$\frac{A}{\cos \alpha} Z = \iint \frac{z\, dx\, dy}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \iint z\, dx\, dy = \frac{1}{\cos \alpha} V,$$

donde

$$V = A\, Z$$

O volume do cylindro é, pois, igual ao producto da área da base pela perpendicular baixada do centro de gravidade da secção obliqua sobre o plano da mesma base.

Representando por

$$x_1,\ y_1 \quad \text{e} \quad z_1$$

as coordenadas do centro de gravidade da base A, por

$$x',\ y'\ z',$$

as coordenadas do centro de gravidade da base obliqua A', por ω' um elemento desta, temos, tomando os momentos relativamente a um plano parallelo ás directrizes:

$$A'\, x' = \iint x'\, \omega', \qquad A'\, y' = \iint y'\, \omega'.$$

Multiplicando por $\cos \alpha$, temos:

$$A' \cos \alpha\, x' = \iint \omega' \cos \alpha\, x',$$

$$A' \cos \alpha\, y' = \iint \omega' \cos \alpha\, y',$$

ou:

$$A\, x' = \iint \omega\, x',$$

$$A\, y' = \iint \omega\, y'$$

De modo identico achariamos :

$$Y = b + \frac{l}{2} \cos \beta$$

Determinando as coordenadas do ponto, meio da linha, pelas suas equações, isto é, fazendo nessas equações :

$$s = \frac{1}{2} l$$

temos :

$$x = a + \frac{l}{2} \cos \alpha \qquad y = b + \frac{l}{2} \cos \beta$$

O centro de gravidade da linha recta acha-se, pois, no meio da linha.

Chegariamos mais rapidamente a este resultado fazendo coincidir a recta com o eixo dos x e tomando um dos seus extremos para origem.

Neste caso temos :

$$\int d s = \int d x = l,$$

$$X = \frac{\int_0^l x \, d x}{l} = \frac{l^2}{2 l} = \frac{l}{2}$$

2ª — Consideremos um arco de circulo homogeneo: $A B C = l$, (fig. 72).

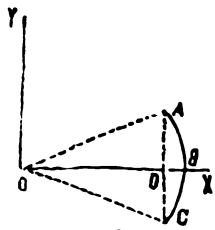


Fig. 72

Tomando para origem o centro do circulo e para eixo dos x o eixo de symetria do arco $O B$, o centro de gravidade deste será determinado pela equação :

$$X = \frac{\int x \, d s}{l}$$

A equação do circulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

nos dá, differenciando e elevando ao quadrado:

$$d\,y^2 = \frac{x^2}{y^2}\,d\,x^2 \cdot$$

Substituindo nesta expressão o valor de y^2 dado pela equação (1), temos:

$$d\,y^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}\,d\,x^2$$

Substituindo este valor na expressão da differencial do arco ou em:

$$d\,s = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2},$$

temos:

$$d\,s = \sqrt{d\,x^2 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\,d\,x^2} = dx \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2\,x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,d\,x$$

Substituindo este valor na expressão de X, temos:

$$l\;X = \int x\,dx \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \int \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\,r\,\sqrt{r^2 - x^2}$$

Esta integral devendo ser calculada entre os limites:

$$x = o\;D = a\,,\quad x = o\;B = r$$

para a metade do arco, calculado o seu valor, temos de dobral-o para o arco inteiro.

Portanto:

$$r \int_a^r \frac{x\,d\,x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \Big[-\,r\,\sqrt{r^2 - x^2}\Big]_a^r = r\,\sqrt{r^2 - a^2}$$

Da equação da curva, differenciada e elevada ao quadrado, deduz-se :

$$dy^2 = \frac{p^2\, dx^2}{y^2}$$

Substituindo y^2 pelo seu valor dado pela equação da curva, temos :

$$dy^2 = \frac{p\, dx^2}{2x}$$

Substituindo na expressão de ds, temos :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{p\, dx^2}{2\,x}} = dx \sqrt{1 + \frac{p}{2\,x}}$$

Substituindo na expressão de X, temos :

$$l\ X = \int x\, ds = \int x\ dx \sqrt{1 + \frac{p}{2\,x}} = \int dx \sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} =$$

$$= \int dx \sqrt{\left(x + \frac{p}{4}\right)^2 - \frac{p^2}{16}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} - \frac{p^2}{32}\, lg. \left(\frac{4x + p + 4\sqrt{x^2 + \frac{px}{4}}}{p}\right)$$

Substituindo o arco l pelo seu valor, temos, finalmente, para abcissa do centro de gravidade.

$$X = \frac{\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} - \frac{p^2}{32}\, lg. \left(\frac{4\,x + p + 4\sqrt{x^2 + \frac{px}{4}}}{p}\right)}{y\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2}\, lg. \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}\right)}$$

Fica por este modo determinada a posição do centro de gravidade do arco, em formação das coordenadas de um qualquer de seus pontos e do parametro.

4º—Consideremos a cycloide

$$O\ E\ F,$$

(fig. 73), descripta pelo circulo C. Tomando $O\ F$ para eixo dos x e $O\ C$ para eixo dos y, representemos por

$$y_1 = M\ m,\ x_1 = o\ m$$

as coordenadas de um qualquer dos seus pontos M. Unindo o ponto M ao centro do circulo gerador C, representando por α o angulo

$$M\ C\ B,$$

e por r o raio desse circulo, temos :

$$arco\ M\ a\ B = O\ B = r\ \alpha$$

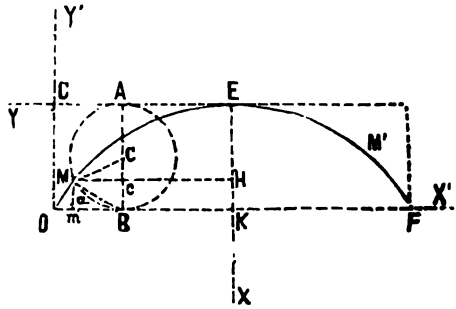


Fig. 73

Sendo $m\ B$ a projecção sobre $O\ F$ do raio $M\ C$, que faz com esse eixo um angulo

$$C\ M\ c$$

igual a

$$\frac{\pi}{2} - \alpha\ ,$$

temos :

$$(1) \qquad O\ m = O\ B - m\ B = r\ \alpha - r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= r\left(\alpha - sen\ \alpha\right) = x_1$$

Sendo $M\,m$ igual a projecção sobre o diametro AB da corda $M\,B$, que tem para comprimento :

$$2\,r\,sen\,\frac{\alpha}{2}$$

e faz com esse diametro um angulo

$$M\,B\,A$$

igual a

$$\frac{\pi - \alpha}{2},$$

temos para ordenada do ponto M :

$$(2) \qquad M\,m = 2\,r\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\,r\,sen^2\,\frac{\alpha}{2} =$$

$$= r\left(1 - cos\,\alpha\right) = y_1$$

Deduzindo desta igualdade o valor de

$$cos\,\alpha,$$

temos :

$$cos = \frac{r - y_1}{r}$$

Substituindo este valor na expressão de

$$sen\,\alpha$$

temos :

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\alpha} = \sqrt{1 - \frac{(r - y_1)^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{(2\,r - y}}{r}$$

Differenciando as equações (1) e (2), temos :

$$dx_1 = r\left(1 - cos\,\alpha\right)d\,\alpha, \quad dy_1 = r\,sen\,\alpha\,d\,\alpha$$

Substituindo estes valores na expressão de dx_1 (3), temos:

$$dy = \sqrt{\frac{2r - x}{x}}\, dx,$$

donde :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r - x}{x}}$$

Substituindo este valor na expressão de ds, temos :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \frac{2r - x}{x}} =$$

$$= \sqrt{2r}\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

Integrando, temos :

$$\sqrt{2r} \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2\sqrt{2r}\sqrt{x} = 2\sqrt{2rx}$$

Fazendo a integração entre os limites a e b, temos :

$$s = \left[2 \sqrt{2rx} \right]_b^a$$

valor de um arco da cycloide referida ao seu eixo de symetria e a tangente ao vertice.

O centro de gravidade deste arco é determinado pelas equações :

$$s\,X = \int x\, ds, \quad s\,Y = \int y\, ds$$

Substituindo ds pelo seu valor na expressão da abcissa, temos :

$$s\,X = \int x\, dx \sqrt{\frac{2r}{x}}$$

Sendo :

$$\int x\,dx\sqrt{\frac{2r}{x}} = \sqrt{2r}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{2r}\;x^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2\,r}\;x\sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{2\,r\,x}\,;$$

tomando a integral entre os limites a e b, temos :

$$\int_b^a x\,ds = \left[\frac{2}{3}\,x\,\sqrt{2\,r\,x}\right]_b^a$$

Para o arco EM sendo

$$b = o \;\; e \;\; a = x$$

temos:

$$\int_o^x x\,ds = \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{2\,r\,x}$$

Calculando o valor de s entre os mesmos limites, temos :

$$s = \left(2\sqrt{2\,r\,x}\right)_o^x = 2\sqrt{2\,r\,x}$$

Substituindo estes valores na expressão de x, temos, finalmente, para a abcissa do centro de gravidade do arco da cycloide.

$$X = \frac{\int x\,ds}{s} = \frac{\frac{2}{3}\,x\sqrt{2\,r\,x}}{2\sqrt{2\,r\,x}} = \frac{1}{3}\,x$$

Considerando a integral da expressão da ordenada Y, temos :

$$\int y\,ds = \int y\,dx\sqrt{\frac{2\,r}{x}} = \sqrt{2\,r}\int y\sqrt{\frac{dx}{x}}$$

Applicando a integral do segundo membro a fórmula geral

$$\int u\, dv = uv - \int v\, d\, u$$

fazendo:

$$u = y,\ du = dy,\ v = 2\sqrt{x},\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

temos:

$$\int y \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, y \sqrt{x} - \int 2 \sqrt{x}\ d\, y$$

Sendo

$$dy = dx \qquad \frac{\left[2\, r - x\right]^{\frac{1}{2}}}{x}$$

temos:

$$\int y \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, y \sqrt{x} - \int 2 \sqrt{x}. \qquad \frac{\left[2r - x\right]^{\frac{1}{2}}}{x} dx =$$

$$= 2\, y \sqrt{x} + 2 \int \left(2\, r - x\right)^{\frac{1}{2}}\ d\, x =$$

$$2 \left[y \sqrt{x} + \frac{2}{3} \left(2\, r - x \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Substituindo este valor e tomando a integral entre os limites

$$x = 0,\ x = x$$

temos, finalmente:

$$\int_0^x y\,ds = 2\sqrt{2r}\left[y\sqrt{x} + \frac{2}{3}\left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\left(2r\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Substituindo este valor na expressão de Y, temos, finalmente, para expressão da ordenada do centro de gravidade do arco da cycloide:

$$Y = \frac{2\sqrt{2r}\left[y\sqrt{x} + \frac{2}{3}(2r - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(2r)^{\frac{3}{2}} \right]}{2\sqrt{2rx}} =$$

$$= y + \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(2r - x)^{\frac{3}{2}} - (2r)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Si fizermos nas expressões das coordenadas do centro de gravidade do arco EM:

$$x = EK = 2r\ ,\quad y = Ko = \pi r$$

teremos para coordenadas do centro de gravidade da metade do ramo EO da curva:

$$X_1 = \frac{2}{3}r\quad ,\quad Y_1 = r\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$$

Si considerarmos um arco qualquer MM' constituido pelos dois arcos contados do vertice:

$$EM = s \quad e \quad EM' = s'\ ,$$

representando por x e y as coordenadas do ponto M e por x', y' as coordenadas do ponto M', temos :

$$s = 2\sqrt{2rx}\ ,\ s' = 2\sqrt{2rx'}\ ,\ S = s + s' =$$

$$= 2\sqrt{2r}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x'}\right)$$

Representando por X e Y as coordenadas do centro de gravidade de S, e por :

$$X_1,\ Y_1,\ X_2,\ Y_2$$

as coordenadas dos centros de gravidade de s e s', temos:

$$SX = sX_1 + s'X_2\ ,\ SY = sY_1 + s'Y_2$$

Substituindo S, s e s' pelos seus valores, temos:

$$2\sqrt{2r}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x'}\right)X = 2\sqrt{2rx} \times \frac{x}{3} + 2\sqrt{2rx'} \times \frac{x'}{3},$$

pois que

$$X' = \frac{x}{3} \quad e \quad X_2 = \frac{x'}{3}$$

Tirando o valor de X, temos, finalmente, para abcissa do arco considerado MM'

$$X = \frac{2\sqrt{2rx} \times \frac{x}{3} + 2\sqrt{2rx'} \times \frac{x'}{3}}{2\sqrt{2r}\left[\sqrt{x} + \sqrt{x'}\right]} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{x\sqrt{x} + x'\sqrt{x'}}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} = \frac{1}{3}\left(x - \sqrt{xx'} + x'\right)$$

Para Y, temos:

$$2\sqrt{2r}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x'}\right)Y = 2\sqrt{2rx}\left[y+\frac{2}{3\sqrt{x}}\right.$$

$$\left.\left[(2r-x)^{\frac{3}{2}}-(2r)^{\frac{3}{2}}\right]\right]+2\sqrt{2rx'}\left[y'+\frac{2}{3\sqrt{x'}}\right.$$

$$\left.\left[(2r-x')^{\frac{3}{2}}-(2r)^{\frac{3}{2}}\right]\right]$$

Tirando o valor de Y, temos, finalmente, para expressão da ordenada :

$$Y=\frac{\sqrt{x}\left[y+\frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(2r-x)^{\frac{3}{2}}-(2r)^{\frac{3}{2}}\right]\right]+\sqrt{x'}\times\left[y'+\frac{2}{3\sqrt{x'}}\left[(2r-x')^{\frac{3}{2}}-(2r)^{\frac{3}{2}}\right]\right]}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}}$$

Si o ponto M' estiver na mesma metade do ramo que o ponto M, isto é, si o vertice não estiver comprehendido entre os dois, o momento do arco S será igual não ás somma mas a differença dos momentos dos arcos s e s'.

3º — Consideremos a catenaria :

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Tomando para eixo dos y o eixo de symetria da curva e considerando um arco comprehendido entre duas ordenadas igualmente afastadas da origem, a posição do seu centro de gravidade será determinada pela equação :

$$Y = \frac{\int y\, ds}{\int ds}$$

Para termos a integral do denominador differenciemos a equação da curva :

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

Substituindo este valor na expressão de ds, temos :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

Integrando, temos :

$$S = \frac{1}{2}\int\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

que é o valor do arco considerado.

Para a integral do numerador, temos, substituindo y e ds pelos seus valores :

$$\int y\,ds = \frac{a}{4}\int\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{a}{4}\left[\int\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx + 2x\right)$$

Determinando o valor da integral do segundo membro temos :

$$\int\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Substituindo este valor na integral do numerador da expressão de Y, temos :

$$\int y\,ds = \frac{a}{4}\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right.$$

$$\left.\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + 2x\right] = \frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\times$$

$$\times\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + \frac{ax}{2} = \frac{1}{2}ys + \frac{ax}{2}.$$

Substituindo na expressão de Y, temos, finalmente, para valor da ordenada:

$$Y = \frac{ys + ax}{2s} .$$

3º — Consideremos agora uma curva de dupla curvatura.

Supponhamos que se procura determinar o centro de gravidade de um arco de helice. Esse arco projectando-se sobre o plano horizontal ou sobre um plano perpendicular ao eixo do cylindro em cuja superfice acha-se traçada a helice, segundo um arco de circulo e sendo o centro de gravidade da projecção de um systema de pontos a projecção do centro de gravidade desse systema, a projecção do centro de gravidade do arco de helice é o centro de gravidade do arco, segundo o qual, ella projecta-se.

O centro de gravidade do arco de helice acha-se, pois, sobre a vertical levantada pelo centro de gravidade do arco de circulo sua projecção.

A projecção do arco de helice sobre o eixo do cylindro sendo uma recta homogenea, o centro de gravidade desta, meio da linha, sendo a projecção do centro de gravidade do arco da helice, este ponto acha-se sobre o plano horizontal equidistante dos planos horizontaes, que passam pelos extremos do arco considerado ou sobre o plano horizontal que passa pelo meio deste arco.

Devendo estar esse ponto sobre a vertical tirada pelo centro de gravidade do arco de circulo e sobre o plano horizontal que passa pelo meio do arco da helice, o centro de gravidade deste é determinado pelo ponto de encontro dessa recta com esse plano.

Para determinar as coordenadas desse centro de gravidade, consideremos as equações da curva :

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad z = b \, ar \cos \frac{x}{a} .$$

Destas equações deduz-se:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{b^2}{y^2},$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{b^2}{x^2},$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2}, \quad \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{x^2}{b^2}.$$

Substituindo successivamente estes valores na expressão de

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

acharemos :

$$\frac{ds}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{dx}{y},$$

$$\frac{ds}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{dy}{x},$$

$$\frac{ds}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{dz}{b}.$$

A posição do centro de gravidade sendo dada pelas equações seguintes, para um arco que comece no ponto

$$\left(x = a, \quad y = 0, \quad z = 0\right)$$

e termine no ponto

$$\left(x, \quad y, \quad z\right),$$

$$X = \frac{\int_x^a x\,ds}{\int ds}, \quad Y = \frac{\int_0^y y\,ds}{\int ds}, \quad Z = \frac{\int_0^y z\,ds}{\int ds}$$

temos, para os valores dessas coordenadas:

$$X = \frac{\int_0^y x \frac{dy}{x}}{\int \frac{dz}{b}} = \frac{b \int_0^y dy}{\int dz} = \frac{by}{z}$$

$$Y = \frac{\int_x^a y \frac{dx}{y}}{\int \frac{dz}{b}} = \frac{b \int_x^a dx}{\int dz} = \frac{b\left(a - z\right)}{x}$$

$$Z = \frac{\int_0^z z \frac{dz}{b}}{\int \frac{dz}{b}} = \frac{\int_0^z z \, dz}{\int dz} = \frac{z}{2}$$

A determinação do centro de gravidade como temos visto exige em geral tres integrações para as curvas planas, sendo duas relativas aos momentos:

$$x \, ds \qquad \text{e} \qquad z \, ds \, ,$$

e a terceira, que em muitos casos é a mais complicada, é propria a geometria integral, pois consiste na rectificação de um arco da linha ou na integral $y \, ds$.

Esta ultima torna muitas vezes, como vamos ver, a determinação exacta impossivel:

Consideremos a sinusoide

$$y = sen \, x,$$

e supponhamos que se procura determinar o centro de gravidade de um arco comprehendido entre as abcissas:

$$x = 0 \qquad x = \pi \, .$$

Destas equações deduz-se:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{b^2}{y^2},$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{b^2}{x^2},$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2}, \quad \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{x^2}{b^2}.$$

Substituindo successivamente estes valores na expressão

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

iremos:

$$\frac{ds}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{dx}{y},$$

$$\frac{ds}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{dy}{x},$$

$$\frac{ds}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{dz}{b}.$$

A posição do centro de gravidade sendo dada pelas equações seguintes, para um arco que comece no ponto

$$\left(x = a, \quad y = 0, \quad z = 0\right)$$

e termine no ponto

$$\left(x, \quad y, \quad z\right),$$

$$X = \frac{\int_x^a x\,ds}{\int ds}, \quad Y = \frac{\int_0^y y\,ds}{\int ds}, \quad Z = \frac{\int_0^y z\,ds}{\int ds}$$

Fazendo na integral do numerador

$$\cos^2 x = u^2 ,$$

temos :

$$du = - \operatorname{sen} x \, dx ,$$

substituindo, temos :

$$Y = \frac{\int_x^1 du \sqrt{1 + u^2}}{\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x}}$$

O numerador integra-se facilmente, o denominador só póde ser calculado por approximação, é uma formação elliptica.

Representando essa integral por K, temos :

$$Y = \frac{\left[\frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} l g \left(x + x \sqrt{1 + x^2} \right) \right]_0^1}{\sqrt{2} \, K} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + l g \left(1 + \sqrt{2} \right)}{2 \sqrt{2} \, K}$$

Para a ellipse e para a hyperbole a impossibilidade será a mesma, pois os denominadores serão, como este, expressões hyperbolicas da fórma :

$$d s = d \theta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta},$$

emquanto que as expressões dos numeradores :

$$x \, d s = a \cos \theta \, d \theta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \; y \, d s =$$

$$= a \operatorname{sen} \theta \, d \theta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b \cos^2 \theta}$$

deduzidas por meio das expressões das coordenadas de um ponto qualquer do quadrante:

$$x = \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta$$

são integraveis fazendo-se

$$u = a \operatorname{sen} \theta$$

em uma, e

$$u = b \operatorname{sen} \theta$$

na outra.

7º — Como ultimo caso relativo ás linhas consideremos uma recta heterogenea a, cuja densidade varia proporcionalmente com a distancia a um dos seus extremos.

Fazendo coincidir a recta com o eixo dos x, tomando para origem o extremo em que a densidade é zero, temos para determinar o centro de gravidade

$$X = \frac{\int \triangle x \, d s}{\int \triangle d s}$$

Representando por δ a densidade á unidade de distancia, temos para densidade a uma distancia x

$$\triangle = \delta x.$$

Substituindo este valor e tomando as integraes entre os limites

$$o \quad \text{e} \quad a,$$

temos:

$$X \frac{\int_o^a x^2 \, d x}{\int_o^a x \, d x} = \frac{\frac{1}{3} a}{\frac{1}{2} a} = \frac{2}{3} a$$

Supponhamos que a densidade da recta varia proporcionalmente com a potencia n da distancia a um ponto fixo da sua direcção.

Representando por

$$a, \quad b \quad \text{e} \quad X$$

as distancias desse ponto aos extremos da recta e ao centro de gravidade, temos para determinar o seu centro de gravidade:

$$X = \frac{\int_b^a \Delta\, x\, d\, s}{\int_b^a \Delta\, d\, s}$$

Sendo a densidade para um ponto a uma distancia x :

$$\Delta = \delta\, x^n,$$

temos :

$$X = \frac{\int_b^a x^{n+1}\, d\, x}{\int_b^a x^n\, dx} = \frac{\frac{1}{n+2}\left(a^{n+2} - b^{n+2}\right)}{\frac{1}{n+1}\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\, \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a^{n+1} - b^{n+1}}$$

Consideremos a determinação do centro de gravidade das superficies.

1° — Seja um triangulo ABO, referido a dous eixos coordenados rectangulares cuja origem seja o vertice o e cujo eixo dos y seja parallelo ao lado AB, f (74).

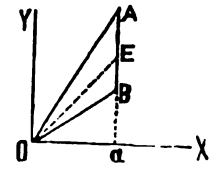


Fig. 74

O centro de gravidade é dado pelas fórmulas:

$$X = \frac{\int (y - y')x\,dx}{\int (y - y')\,dx}, \qquad Y = \frac{1}{2}\,\frac{\int (y^2 - y'^2)\,dx}{\int (y - y')\,dx},$$

Sendo os lados

$$OA \quad \text{e} \quad OB$$

representado pelas equações:

$$y = a\,x, \quad y' = a'\,x$$

temos, substituindo estes valores e representando por h a abcissa $O\,a$ ou altura do triangulo, e calculando as integraes entre os limites

$$O \quad \text{e} \quad h:$$

$$\overline{X} = \frac{\int_0^h (a\,x^2 - a'\,x^2)\,dx}{\int_0^h (a\,x - a'\,x)\,dx} = \frac{\int_0^h (a - a')x^2\,dx}{\int_0^h (a - a')x\,dx} = \left[\frac{2}{3}\,x\right]_0^h = \frac{2}{3}\,h$$

A abcissa do centro de gravidade é igual, pois, a 2/3 da altura a partir do vertice.

A expressão do y nos dá :

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int_0^h \left(a^2 x^2 - a'^2 x^2\right) d\,x}{\int_0^h \left(a\,x - a'\,x\right) d\,x} = \frac{\left(a + a'\right)\int_0^h x^2\, d\,x}{2\int_0^h x\, d\,x} =$$

$$= \left[\frac{a + a'}{3}\, x\right]_0^h$$

portanto :

$$Y = \frac{a + a'}{2} X \qquad (1)$$

equação da recta que partindo da origem passa pelo centro de gravidade.

O ponto E, meio do lado AB, tendo para coordenadas:

$$o\,a = h \quad \text{e} \quad E\,a = \frac{a + a'}{2}\, h,$$

o coefficiente angular da equação (1) representa o coefficiente angular do diametro correspondente ao systema de cordas parallelas a base AB do triangulo.

O centro de gravidade acha-se, pois, sobre a mediana

$$O\,E,\ a\ \frac{2}{3}$$

dessa linha, a partir do vertice.

2º — Consideremos um trapesio

$$A\,B\,C\,O.$$

Referindo-o a dous eixos coordenados, cujo eixo dos y coincida com uma das bases parallelas $A\,O\,f$ (75); representando por h a altura, por

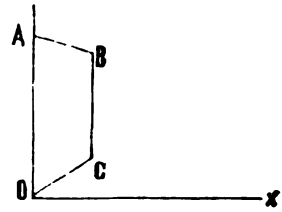


Fig. 75

$$b \quad \text{e} \quad b'$$

as bases parallelas, o centro de gravidade é determinado pelas equações:

$$X = \frac{\int_0^h \left(y - y'\right) x\, d\,x}{\int_0^h \left(y - y'\right) d\,x}, \qquad Y = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^h \left(y^2 - y'^2\right) d\,x}{\int_0^h \left(y - y'\right) dx},$$

e os lados

$$A\,B \quad \text{e} \quad O\,C$$

teem para equações:

$$y' = a'\,x \qquad y = a\,x + b$$

Substituindo estes valores nas expressões de

$$X \quad \text{e} \quad Y$$

temos:

$$X = \frac{\int_0^h \left[\left(a - a'\right)x^2 + b\,x\right] d\,x}{\int_0^h \left[\left(a - a'\right)x + b\right] d\,x} = \frac{\left[\left(a - a'\right)\frac{x^3}{3} + b\,\frac{x^2}{2}\right]_0^h}{\left[\left(a - a'\right)\frac{x^2}{2} + b\,x\right]_0^h} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(a - a'\right)h^2 + b\,h}{\left(a - a'\right)h + 2\,b}$$

Para a ordenada temos:

$$Y = \frac{1}{2} \frac{\int_0^h \left[\left(a\,x + b \right)^2 - a'^2\,x^2 \right] d\,x}{\left(a - a' \right) \frac{h^2}{2} + b\,h} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(a^2 - a'^2 \right) \frac{h^3}{3} + a\,b\,h^2 + b^2\,h}{\left(a - a' \right) \frac{h^2}{2} + b\,h} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \left(a^2 - a'^2 \right) h^2 + a\,b\,h + b^2}{\left(a - a' \right) h + 2\,b}$$

Si tivermos

$$b = b',$$

isto é, si o trapesio se transformar em um parallelogrammo, sendo então $a = a'$ temos para coordenadas do centro de gravidade do parallelogrammo:

$$X = \frac{h}{2}, \; Y = \frac{a\,h + b}{2}$$

O centro de gravidade é, pois, o ponto de cruzamento das diagonaes.

Si tivermos

$$b = o,$$

isto é, si o trapesio transformar-se em um triangulo temos:

$$X = \frac{2}{3}\,h, \; Y = \frac{a + a'}{3}\,h$$

3º — Consideremos um segmento circular

$$A\ B\ C\ A \qquad \text{(fig. 76)}$$

Representemos por r o raio do circulo, por α o angulo

$$A\ o\ B$$

ou a metade do angulo do segmento, por

$$x \text{ e } y$$

as coordenadas de um ponto qualquer M, e por θ o angulo variavel

$$M\ O\ B\ .$$

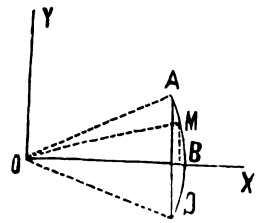


Fig. 76

Referindo o segmento a dous eixos coordenados cujo eixo dos x seja o eixo de symetria $o\ B$ da figura, o centro de gravidade é determinado pela equação:

$$X = \frac{\int (y - y')\, x\, dx}{\int (y - y')\, dx}$$

Representando y as ordenadas da parte AB da curva e y' as ordenadas da parte BC, temos:

$$y - y' = 2\, y,$$

pois que y' é negativo, portanto:

$$X = \frac{\int y\, x\, dx}{\int y\, dx}$$

Sendo:

$$x = r \cos \theta\ ,\ y = r \operatorname{sen} \theta\ ,$$

temos:

$$dx = -\, r \operatorname{sen} \theta\, d\, \theta$$

Substituindo os valores de

$$y \text{ e } dx$$

na expressão de X temos para a integral do denominador:

$$\int y\,dx = \int r \operatorname{sen} \varphi \times -r \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi = -r^2 \int \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi$$

Mas sendo:

$$\int \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi = \int \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi$$

integrando por partes, temos:

$$\int \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} - \frac{2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{4} =$$

$$= \frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4}$$

portanto, calculando entre os limites

$$-\alpha \text{ e } \alpha$$

temos:

$$\int_{\alpha}^{-\alpha} y\,dx = -r^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4} \right]_{\alpha}^{-\alpha} = r^2 \alpha - \frac{r^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2} =$$

$$= r^2 \left(\alpha - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} \right)$$

que é a expressão da superficie do segmento.

Considerando a integral do numerador da expressão de X e substituindo nessa integral dx pelo seu valor deduzido da equação do circulo:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

temos:

$$\int y\, x\, dx = -\int \frac{y^2\, dy\, x}{x} = -\int y^2\, dy = -\frac{y^3}{3}$$

Tomando os mesmos limites e substituindo y pelo seu valor

$$r\ sen\ \theta$$

temos:

$$\int_{\alpha}^{-\alpha} y\, x\, dx = \left[-\frac{r^3}{3}\ sen^3\ \theta\right]_{\alpha}^{-\alpha} = \frac{2}{3}\ r^3\ sen^3\ \theta$$

Substituindo os valores das duas integraes na expressão de X, temos:

$$X = \frac{\frac{}{3}\ r^3\ sen^3\ \alpha}{r^2\left(\alpha - \frac{sen\ 2\,\alpha}{2}\right)}\ \frac{4\ r\ sen^3\ \alpha}{6\ \alpha - sen\ 2\ \alpha}$$

Si

$$\alpha = \pi$$

isto é, si o segmento comprehende toda a superficie do circulo, temos:

$$X = o;$$

o centro de gravidade coincide com o centro do circulo.

Podemos obter a abcissa do centro de gravidade do segmento em formação do raio r, do arco s e da corda c.

Sendo:

$$r\ sen\ \alpha = \frac{c}{2},$$

temos:

$$sen\ \alpha = \frac{c}{2\ r}$$

Substituindo este valor na expressão de

$$sen\ 2\ \alpha,$$

temos:

$$sen\ 2\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 2\ sen\ \alpha \sqrt{1 - sen^2} =$$

$$= \frac{c}{r} \sqrt{1 - \frac{c^2}{4\ r^2}} = \frac{c}{2\ r^2} \sqrt{4\ r^2 - c^2}$$

Sendo:

$$2\ \alpha\ r = s\ ,$$

temos:

$$\alpha = \frac{s}{2\ r}$$

Substituindo estes valores na expressão de X, temos:

$$X = \frac{c^3}{6\ s\ r - 3\ c \sqrt{4\ r^2 - c^2}}$$

4º — O sector circular tendo uma superficie igual á somma das superficies do triangulo

$$A\ o\ C$$

e do segmento

$$A\ B\ C\ A,$$

o seu momento é igual á somma dos momentos dos dous.

Representando por:

$$s_1\ e\ s_2\ e\ S$$

as superficies do sector, do triangulo e do segmento por:

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ X$$

as distancias dos seus centros de gravidade ao centro do circulo, temos:

$$S\ X = s_1\ x_1 + s_2\ x_2$$

A superficie do sector sendo igual á metade do producto do arco pelo raio, e sendo o arco igual ao producto do raio pelo angulo, temos:

$$S = r^2 \alpha$$

A superficie do triangulo sendo igual ao producto de dous de seus lados pelo seno do angulo por elle formado, temos:

$$s_1 = \frac{1}{2} r^2 \, sen \, 2 \alpha$$

A superficie de segmento sendo a differença das duas, temos:

$$s_2' = r^2 \left(\alpha - \frac{1}{2} sen \, 2 \alpha \right)$$

Para a distancia x, do centro de gravidade do triangulo, temos:

$$x_1 = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} r \cos \alpha,$$

Para a distancia do centro de gravidade do segmento, temos :

$$x_2 = \frac{4 \, r \, sen^3 \, \alpha}{6 \, \alpha - 3 \, sen \, 2 \alpha}$$

Substituindo estes valores, temos :

$$r^2 \alpha \times X = \frac{1}{2} r^2 \, sen \, 2 \alpha \times \frac{2}{3} r \cos \alpha + r^2 \left(\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} sen \, 2 \alpha \right) \times \frac{4 \, r \, sen^3 \, \alpha}{3 \, (2 \alpha - sen \, 2 \alpha)}$$

Portanto :

$$X = \frac{2 \, r \, sen \, \alpha}{3 \, \alpha}$$

expressão da abcissa do centro de gravidade do sector.

Esta determinação póde ser feita directamente ou utilisando as coordenadas rectangulares ou as coordenadas po-

Considerando um sector elliptico comprehendido entre dous semi-diametros conjugados, o seu centro de gravidade é determinado pelas equações :

$$X = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}, \qquad y = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$$

Calculando as integraes entre os limites :

$$x = o, \quad x = a, \quad y = o, \quad y = y,$$

temos :

$$X = \frac{\int_o^a x\,dx \int_o^y dy}{\int_o^a dx \int_o^y dy} = \frac{\int_o^a x\,dx\,y}{\int_o^a dx\,y}$$

A equação da curva nos dá :

$$\frac{a}{b} = y\sqrt{a^2 - x^2}$$

Substituindo na expressão de X, temos :

$$X = \frac{\frac{b}{a}\int_o^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}{\frac{b}{a}\int_o^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\left[(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_o^a}{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\,ar\,sen\,\frac{x}{a}\right]_o^a} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,a^2} = \frac{4}{3}\,\frac{a}{\pi}$$

Para o valor da ordenada temos :

$$Y = \frac{\int_0^a \int_0^y y\, dx\, dy}{\int_0^a \int_0^y dx\, dy} = \frac{\int_0^a dx.\ \frac{1}{2}\, y^2}{\int_0^a dx.\ y}$$

Substituindo y e y^2 pelos seus valores dados pela equação da curva, temos :

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx}{\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx} = \frac{\frac{1}{3}\, a\, b^2}{\frac{b}{a} \times \frac{\pi}{4}\, a^2} = \frac{4\, b}{3\, \pi}$$

7º — Referindo a cycloide a sua tangente ao vertice e a perpendicular a essa tangente no vertice (fig. 77), temos para sua equação :

$$dy = \sqrt{\frac{2\, r - x}{x}}\, dx$$

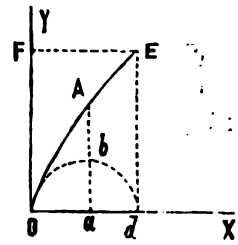


Fig. 73

Considerando um segmento comprehendido entre a curva e as coordenadas x e y de um de seus pontos A, o centro de gravidade é determinado pelas equações :

$$X = \frac{\int x\, y\, dx}{\int y\, dx}, \qquad Y = \frac{\int y^2\, dx}{\int y\, dx}$$

A integral do denominador tomada entre os limites de x nos dá :

$$\int_0^x y\, dx = xy - \int_0^x x\, dy$$

A primeira integral podemos substituir pelo seu valor deduzido da equação (1):

$$\frac{r}{2} \int_0^x \sqrt{2\,r\,x - x^2}\; dx = \frac{r}{2}\; A$$

Quanto á segunda, multiplicando e dividindo por dois, temos:

$$\frac{1}{4} \int_0^x (\,2\,r - 2\,x\,)\; dx\; \sqrt{2\,r\,x - x^2}$$

Sendo

$$(\,2r - 2x\,)$$

a derivada da quantidade submettida ao radical e tendo nós:

$$\int dx \sqrt{x} = \int dx\; x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\; x^{\frac{3}{2}}$$

segue-se que:

$$\frac{1}{4} \int_0^x (2\,r - 2\,x)\; \sqrt{2\,r\,x - x^2}\; dx = \frac{1}{6}\,(2\,r\,x - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Substituindo todos estes valores temos, finalmente:

$$\int_0^x y\,x\,dx = \left[\, y\,\frac{x^2}{2} - \frac{r\,A}{2} + \frac{1}{6}\,(2\,r\,x - x^2)^{\frac{3}{2}} \,\right]_0^x$$

donde:

$$\int_0^x y\,x\,dx = y\,\frac{x^2}{2} - \frac{rA}{2} + \frac{1}{6}\,(2\,r\,x - x_2)^{\frac{3}{2}}$$

Substituindo os valores das integraes na expressão de X temos para abcissa do centro de gravidade do segmento:

$$X = \frac{\int_0^x y\,x\,dx}{\int_0^x y\,dx} = \frac{y\,\frac{x^2}{2} - \frac{rA}{2} + \frac{1}{6}\,(2\,rx - x^2)^{\frac{3}{2}}}{xy - A}$$

Considerando a integral do numerador de Y, temos integrando por partes:

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx = \frac{1}{2}\,y^2\,x - \frac{1}{2}\int 2\,x\,y\,dy =$$

$$= \frac{y^2 x}{2} - \int x\,y\,dy$$

Substituindo na integral do segundo membro dy pelo seu valor deduzido da equação da curva, temos:

$$\int x\,y\,dy = \int x\,y\sqrt{\frac{2r - x}{x}}\,dx = \int y\sqrt{x}\sqrt{2r - x}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\,y\sqrt{x}\left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int\left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}} d\left(y\sqrt{x}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\,y\left(2r - x\right)\sqrt{2r\,x - x^2} +$$

$$+ \frac{2}{3}\int\left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}\,dy + \frac{2}{3}\int\left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}} y\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Substituindo na primeira integral dy, temos :

$$\frac{2}{3}\int\left(2r-x\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}\,dy=\frac{3}{2}\int\left(2r-x\right)^{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{9}\left(2r-x\right)^{3}$$

Substituindo na segunda dx pelo seu valor deduzido da equação da curva, temos :

$$\frac{2}{3}\int\left(2r-x\right)^{\frac{2}{3}}y\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\int\left(2r-x\right)\frac{y}{2}\,dy=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}2ry^{2}-\frac{1}{2}\int xy\,dy\right]$$

Substituindo os valores destas integraes, temos:

$$\int xy\,dy=-\frac{2}{3}y\left(2r-x\right)\sqrt{2rx-x^{2}}-\frac{2}{9}\left(2r-x\right)^{3}+$$

$$+\frac{1}{6}2ry^{2}-\frac{1}{3}\int xy\,dy$$

donde :

$$\int xy\,dy=C-\frac{1}{2}y\left(2r-x\right)\sqrt{2rx-x^{2}}-\frac{1}{6}\left(2r-x\right)^{3}+$$

$$+\frac{1}{4}ry^{2}$$

Para $x=o$, temos $y=o$ e $\int xy\,dy=o$ portanto:

$$C=-\frac{4}{3}r^{3}$$

logo :

$$\int xy\,dy=\frac{1}{4}ry^{2}-\frac{1}{2}y\left(2r-x\right)\sqrt{2rx-x^{2}}-$$

$$-\frac{1}{6}\left(2r-x\right)^{3}-\frac{4}{3}r^{3}$$

Substituindo na expressão de

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx$$

temos :

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx = \frac{1}{2}\,y^2\,x - \frac{1}{4}\,r\,y^2 + \frac{1}{2}\,y\,(2\,r -$$

$$- x)\sqrt{2\,r\,x - x^2} + \frac{1}{6}\left(2\,r - x\right)^3 + \frac{4}{3}\,r^3$$

Substituindo os valores das integraes na expressão de Y temos, finalmente, para valor da ordenada do centro de gravidade :

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\,y^2\,x - \frac{1}{4}\,r\,y^2 +}{xy - A}$$

$$\frac{+\,\frac{1}{2}\,y\,(2\,r - x)\sqrt{2\,r\,x - x^2} + \frac{1}{6}\left(2\,r - x\right)^3 + \frac{4}{3}\,r^3}{xy - A}$$

Para termos o centro de gravidade da semicycloide

$$E\ O\ d$$

basta fazer nestas fórmulas :

$$x = 2\,r, \qquad y = \pi\,r$$

Para esta hypothese temos :

$$A = \frac{1}{2}\,\pi\,r^2, \quad S = xy - A = 2\,\pi\,r^2 - \frac{1}{2}\,\pi\,r^2 = \frac{3}{2}\,\pi\,r^2$$

Substituindo estes valores nas expressões de X e Y, temos :

$$X = \frac{7}{6}\,r, \qquad Y = \frac{1}{2}\,\pi\,r - \frac{8}{9}\,\frac{r}{\pi}$$

8º — Consideremos as superficies de revolução. Supponhamos em primeiro logar uma superficie gerada por uma recta gyrando em torno do eixo dos x existente no seu plano.

Sendo a equação da linha geratriz :

$$y = ax + b$$

temos :

$$dy = a\,dx,$$

donde:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2$$

Substituindo este valor na expressão de ds, temos :

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + a^2}$$

O centro de gravidade da superficie sendo dado pela equação :

$$X = \frac{\int x\,y\,ds}{\int y\,ds},$$

temos, substituindo ds :

$$X = \frac{\int x\,y\,dx\sqrt{1 + a^2}}{\int y\,dy\sqrt{1 + a^2}} = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}$$

Sendo este valor igual ao da abcissa do centro de gravidade de uma superficie plana comprehendida entre uma linha e o eixo dos x, conclue-se que o centro de gravidade de qualquer superficie de revolução engendrada por uma recta gyrando em torno de um eixo existente no seu plano, tem a mesma coordenada no sentido desse eixo que o centro de gravidade da superficie geratriz do volume.

Os centros de gravidade da superficie de um cone truncado, de um cylindro ou de um cone recto estão, pois, respectivamente á mesma distancia da origem que os centros de gravidade de um trapesio, de um parallelogrammo ou de um triangulo.

2º — Consideremos a superficie de um cone recto gerada pela rotação da recta $O\ A$ em torno do eixo dos x (fig. 78). O centro de gravidade é determinado pela fórmula :

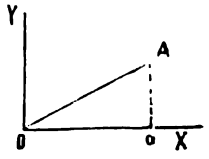


Fig. 78

$$X = \frac{\int x\ y\ ds}{\int y\ ds}$$

Fazendo

$$O\ a = h, \quad A\ a = r \quad \text{e} \quad A\ o = c$$

temos :

$$c = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Sendo o coefficiente angular da recta OA igual a

$$\frac{r}{h}$$

temos para sua equação :

$$y = \frac{r}{h}\ x,$$

donde :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{r^2}{h^2}$$

Substituindo este valor na expressão de ds, temos :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dx}{h}\sqrt{r^2 + h^2}$$

Substituindo este valor e o de Y na integral do numerador de X temos entre os limites o e h :

$$\int_0^h x\,y\,ds = \int_0^h x \times \frac{r}{h}\,x \times \frac{dc}{h}\sqrt{r^2+h^2} = \frac{r}{h^2}\sqrt{r^2+h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^h$$

portanto :

$$\int_0^h x\,y\,ds = \frac{1}{3}\,r\,h\sqrt{r^2+h^2} = \frac{1}{3}\,r\,h\,c$$

Substituindo os valores de y e ds na integral do denominador de X temos:

$$\int_0^h y\,ds = \int_0^h \frac{r}{h}\,x \times \frac{dx}{h}\sqrt{r^2+h^2} = \frac{r}{h^2}\sqrt{r^2+h^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^h,$$

portanto:

$$\int y\,ds = \frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2} = \frac{rc}{2}$$

Substituindo os valores das duas integraes na expressão de X, temos :

$$X = \frac{\frac{r\,h\,c}{3}}{\frac{r\,c}{2}} = \frac{2}{3}\,h$$

Este resultado nos mostra que a abcissa para a superficie de revolução gerada pela recta é igual á abcissa do triangulo gerador do volume do cone, isto é, o centro de gravidade da superficie lateral de um cone recto está a

$$\frac{2}{3}$$

da altura a partir do vertice.

Si quizermos determinar o centro de gravidade da superficie total, representando por S essa superficie e por X' a abcissa do seu centro de gravidade, por s, a superficie lateral e por x_1 a abcissa do seu centro de gravidade, por s_2 a superficie da base e por x_2 a abcissa do seu centro de gravidade temos:

$$S\,X' = s_1\,x_1 + s_2\,x_2$$

sendo:

$$s_1 = \pi\,r\,c, \quad s_2 = \pi\,r^2 \quad S = s_1 + s_2 = r\,\pi\,(c + r)$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\,h \quad , \quad x_2 = h$$

temos:

$$\pi\,r\,(c + r)\,X' = \pi\,r\,c \times \frac{2}{3}\,h + \pi\,r^2 \times h$$

donde:

$$X' = \frac{2\,c + 3\,r}{c + r}$$

3º — Consideremos a superficie lateral de um cone truncado gerada pela recta AB girando em torno do eixo dos x. (Fig. 79).

O centro de gravidade é dado pela formula

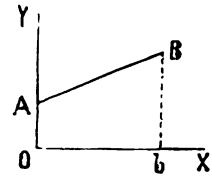


Fig. 79

$$X = \frac{\int y\,x\,ds}{\int y\,ds}$$

Fazendo:

$$OA = r, \quad Bb = R, \quad Ob = h, \quad AB = c$$

a recta AB tem para equação:

$$y = \frac{R - r}{h}\,x + r,$$

donde:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(R - r)^2}{h^2}$$

Substituindo este valor na integral do numerador de X, e tomando essa integral entre os limites a e b temos:

$$\int_b^a xy \frac{r\,dx}{y} = r\left(\frac{x^2}{2}\right)_b^a$$

portanto:

$$\int_b^a x\,y\,ds = r\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) = \frac{r}{2}\left(a^2 - b^2\right)$$

Considerando a integral do denominador de X, temos:

$$\int_b^a y\,ds = \int_b^a y\,r\,\frac{dx}{y} = r\left(x\right)_b^a = r\left(a - b\right)$$

Substituindo estes valores na expressão de X temos para abcissa:

$$X = \frac{\frac{r}{2}\left(a^2 - b^2\right)}{r\left(a - b\right)} = \frac{a + b}{2} = b + \frac{h}{2}$$

Este resultado nos mostra que o centro de gravidade da zona acha-se no meio de sua altura.

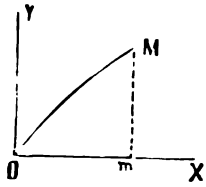


Fig. 81

35º — Consideremos a superfície de revolução gerada pela rotação de um arco de parabola $O\,M$ girando em torno do seu eixo de symetria tomado para eixo dos x, sendo o vertice a origem (Fig. 81). O centro de gravidade é determinado pela equação:

$$X = \frac{\int y\,x\,ds}{\int y\,ds}$$

A equação da parabola: $y^2 = 2\,p\,x$ nos dá:

$$\left(\frac{d\,y}{dx}\right)^2 = \frac{p}{2\,x}$$

Substituindo este valor na expressão de ds temos:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}$$

Substituindo este valor e o de y na integral do numerador de X e tomando esta integral entre os limites $x = o$ e $x = om = h$, temos:

$$\int_o^h x\,y\,ds = \int_o^h x \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx =$$

$$= \int_o^h \sqrt{2px + p^2}\,x\,dx = \int_o^h \sqrt{y^2 + p^2}\,x\,dx =$$

$$= \sqrt{y^2 + p^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_o^h = \sqrt{y^2 + p^2}\,\frac{h^2}{2}$$

Considerando a integral do denominador, temos:

$$\int_o^h y\,ds = \int_o^h \sqrt{p} \sqrt{2x + p\,dx} =$$

$$= \int_o^h \sqrt{y^2 + p^2}\,dx = \sqrt{y^2 + p^2}\,(x)_o^h = \sqrt{y^2 + p^2} \times h$$

Substituindo os valores das duas integraes na expressão de X temos, finalmente, para valor da abcissa do centro de gravidade:

$$X = \frac{\frac{h^2}{2}}{h} = \frac{1}{2}\,h$$

6º — Consideremos a superficie de revolução gerada pela cycloide girando em torno do seu eixo menor.

O centro de gravidade da superficie é determinado pela equação:

$$X = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$$

A equação differencial da curva :

$$dy = \sqrt{\frac{2r - x}{x}}$$

nos dá:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r - x}{x}$$

substituindo este valor na expressão de ds, temos:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{\frac{2r}{x}}$$

Substituindo este valor na integral do denominador e tomando esta integral entre dois limites

$$x' \quad \text{e} \quad x'',$$

temos :

$$\int_{x''}^{x'} y\, ds = \int_{x''}^{x'} y\, dx \sqrt{\frac{2r}{x}} = 2r \int_{x''}^{x'} y x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 2\sqrt{2r} \left[x y^{\frac{1}{2}} - \int x^{\frac{1}{2}} dy \right]_{x''}^{x'} = 2\sqrt{2r} \left[y x^{\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \int x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot (2r - x)^{\frac{1}{2}} dx \right]_{x''}^{x'} =$$

$$= 2\sqrt{2r} \left[y x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} (2r - x)^{\frac{3}{2}} \right]_{x''}^{x'}$$

Considerando a integral do numerador, temos :

$$\int_{x''}^{x'} xy\, ds = \int_{x''}^{x'} yx \sqrt{\frac{2r}{x}}\, dx = \sqrt{2r} \int_{x''}^{x'} yx^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2r} \left[yx^{\frac{3}{2}} - \int x^{\frac{3}{2}}\, dy \right]_{x''}^{x'}$$

Sendo :

$$\int x^{\frac{3}{2}}\, dy = \int x^{\frac{3}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}} \times \left(2r - x\right)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \int x \left(2r - x\right)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= -\frac{2}{3} \left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{15} \left(2r - x\right)^{\frac{5}{2}}$$

substituindo o valor desta integral, temos :

$$\int_{x''}^{x'} xy\, ds = \frac{2}{3} \sqrt{2r} \left[yx^{\frac{3}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}} x + \frac{4}{15} \left(2r - x\right)^{\frac{5}{2}} \right]_{x''}^{x'} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2r} \left[yx^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{4}{3} r + x \right] \right]_{x''}^{x'}$$

Substituindo o valor das integraes na expressão de X, temos, finalmente, para valor da abcissa:

$$X = \frac{\left[yx^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}\left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{3}r + x\right)\right]_{x''}^{x'}}{3\left[yx^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\left(2r - x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{x''}^{x'}}$$

7º — Consideremos, finalmente, uma superficie heterogenea.

Supponhamos que se procura determinar o centro de gravidade de um quadrante de circulo, cuja densidade varia directamente com a distancia ao centro.

Tomando os raios extremos para eixos coordenados, o centro de gravidade é dado pela formula:

$$X = \frac{\iint \Delta\, \rho^2 \cos\theta\, d\theta\, d\rho}{\iint \Delta\, \rho\, d\theta\, d\rho}$$

Para um ponto situado a uma distancia ρ do centro, representando por δ_1 o peso na unidade de distancia temos:

$$\Delta = \delta_1 \rho \quad .$$

Substituindo este valor na expressão de X, e tomando a integral entre os limites:

$$\rho = o, \quad \rho = r \quad \text{e} \quad \theta = o, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

temos :

$$X = \frac{\int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \cos\theta \, d\theta \, d\rho}{\int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\theta \, d\rho} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\rho^4}{4}\right)_0^r \left(\operatorname{sen}\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left(\frac{\rho^3}{3}\right)_0^r \left(\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{r^4}{4}}{\frac{r^3}{3} \frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \frac{r}{\pi}$$

Suppondo que o peso varia proporcionalmente com a potencia n da distancia ao centro, temos :

$$\Delta = \delta_1 \rho^n$$

Substituindo este valor na expressão de X, temos:

$$X = \frac{\int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n+2} \cos\theta \, d\theta \, d\rho}{\int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n+1} \, d\theta \, d\rho} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\rho^{n+3}}{n+3}\right)_0^r \left(\operatorname{sen}\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left(\frac{\rho^{n+2}}{n+2}\right)_0^r \left(\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{2r}{\pi}$$

as distancias entre o vertice da pyramide e os pontos em que o eixo de symetria atravessa a base e a secção parallela, e tomando para eixo dos x o eixo de symetria, temos :

$$\frac{A}{a} = \frac{x^2}{h^2},$$

donde:

$$A = \frac{ax^2}{h^2};$$

sendo neste caso o centro de gravidade dado pela fórmula:

$$X = \frac{\int \omega\, x\, dx}{\int \omega\, dx}$$

e

$$\omega = A$$

Substituindo estes valores na integral do denominador e tomando a integral entre os limites

$$o \text{ e } h,$$

temos:

$$\int_o^h \omega\, x dx = \int_o^h \frac{a\, x^2}{h^2}\, dx = \frac{ah}{3}$$

Considerando a integral do numerador, temos:

$$\int_o^h \omega\, dx = \int_o^h \frac{a\, x^2}{h^2}\, dx = \frac{a\, h^2}{4}$$

Substituindo os valores destas integraes na expressão de X, temos :

$$X = \frac{\frac{a\, h^2}{4}}{\frac{a\, h}{3}} = \frac{3}{4}\, h$$

O centro de gravidade de uma pyramide qualquer acha-se, pois, sobre a linha que une o vertice ao centro de gravidade da base a

$$\frac{3}{4}$$

dessa linha contados a partir do vertice.

2º — Consideremos um cone recto gerado pela revolução de um triangulo rectangulo em torno de um dos lados, que tomarmos para eixo dos x, sendo o vertice a origem.

Representando por h a altura do cone, o centro de gravidade é dado pela fórmula:

$$X = \frac{\int y^2 \, x \, dx}{\int y^2 \, dx}$$

A diagonal do triangulo tendo para equação:

$$y = \frac{r}{h} \, x$$

sendo r o raio da base, deduz-se

$$y^2 = \frac{r^2}{h^2} \, x^2$$

Substituindo este valor nas integraes e tomando-as entre os limites

$$o \text{ e } h,$$

temos para a do numerador:

$$\int_o^h y^2 \, x \, dx = \int_o^h \frac{r^2}{h^2} \, x^3 \, dx = \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{x^4}{4} \right)_o^h = \frac{r^2 \, h^2}{4}$$

Para a integral do denominador, temos:

$$\int_o^h y^2 \, dx = \int_o^h \frac{r^2}{h^2} \, x^2 \, dx = \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{x^3}{3} \right)_o^h = \frac{r^2 \, h}{3}$$

Substituindo estes valores na expressão de X, temos:

$$X = \frac{\frac{r^2 h^2}{4}}{\frac{r^2 h}{3}} = \frac{3}{4} h$$

O centro de gravidade do cone, acha-se, pois, a

$$\frac{3}{4}$$

da altura a partir do vertice.

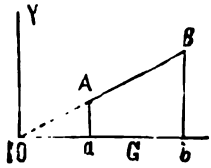


Fig. 83

3º — Consideremos um tronco de cone recto gerado pelo trapezio $A\,B\,b\,a$ (Fig. 83), girando em torno do lado $a\,b$ que tomaremos para eixo dos x, sendo a origem o vertice o do cone a que pertence o tronco.

Fazendo:

$$B\,b = R \qquad A\,a = r \qquad o\,b = H \quad o\,a = h$$

o centro de gravidade é dado pela fórmula:

$$X = \frac{\int_h^H y^2\,x\,d\,x}{\int_h^H y^2\,d\,x}$$

Sendo estas integraes as mesmas que as anteriores differindo apenas nos limites, temos para a do numerador:

$$\int_h^H y^2\,x\,d\,x = \frac{r^2}{h^2}\left(\frac{x^4}{4}\right)_h^H = \frac{r^2}{4\,h^2}\left(H^4 - h^4\right)$$

Para a do denominador, temos:

$$\int_h^H y^2\, d\,x = \frac{r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_h^H = \frac{r^2}{3\,h^2}\left(H^3 - h^3\right)$$

Substituindo estes valores na expressão de X e dividindo ambos os termos da fracção por $H - h$, temos:

$$X = \frac{3}{4}\,\frac{H^3 + H^2\,h + H\,h^2 + h^3}{H^2 + H\,h + h^2}$$

Para determinarmos o centro de gravidade em formação da altura do tronco de cone e das superficies das bases, supponhamos o centro de gravidade em G e façamos:

$$O\,G = X\,,\quad b\,G = D,\quad a\,G = d$$

Portanto:

$$d = X - h,\quad D = H - X$$

Dividindo membro a membro, temos:

$$\frac{d}{D} = \frac{X - h}{H - X}$$

Substituindo X pelo seu valor, temos:

$$\frac{d}{D} = \frac{\dfrac{3}{4}\,\dfrac{H^3 + H^2\,h + Hh^2 + h^3}{H^2 + Hh + h^2} - h}{H - \dfrac{3}{4}\,\dfrac{H^3 + H^2\,h + H\,h^2 + h^3}{H^2 + Hh + h^2}}$$

Effectuando as operações e dividindo ambos os termos da fracção por $H - h$, temos:

$$\frac{d}{D} = \frac{3\,H^2 + 2\,H\,h + h^2}{3\,h^2 + 2\,H\,h + H^2}$$

Sendo as alturas H e h proporcionaes ás raizes quadradas das bases B e b, temos:

$$\frac{d}{D} = \frac{3\,B + 2\sqrt{B.\,h} + b}{3\,b + 2\sqrt{B\,b} + B}$$

Representando o numerador por K e o denominador por K_1, temos:

$$\frac{d}{d + D} = \frac{K}{K + K_1}, \quad donde\ d = \frac{K}{K + K_1} \times h$$

que é a distancia do centro de gravidade á base superior, contada sobre o eixo de symetria.

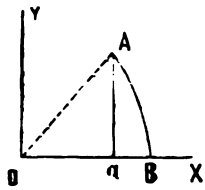


Fig. 84

4º — Consideremos o segmento espherico gerado pela rotação do segmento circular $A\,B\,a$ em torno do raio $o\,B$ que tomamos para eixo dos x (Fig. 84), sendo o centro do arco a origem.

Fazendo:

$$O\,B = r, \quad a\,B = h$$

o centro de gravidade é dado pela formula:

$$X = \frac{\int_{r-h}^{r} y^2\,x\,dx}{\int_{r-h}^{r} y^2\,dx}$$

Fazendo

$$r - h = a$$

e substituindo nas integraes y^2 pelo seu valor dado pela equação do circulo

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

temos, considerando o numerador :

$$\int_a^r (r^2 - x^2)\, x\, dx = r^2 \int_a^r x\, dx - \int_a^r x^3\, dx =$$

$$= \left[r^2 \left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^4}{4}\right) \right]_a^r = \frac{(r^2 - a^2)^2}{4}$$

Substituindo a pelo seu valor

$$r - h,$$

temos :

$$\int_{r-h}^r y^2\, x\, dx = \frac{(r^2 - a^2)^2}{4} = \frac{h^2 (2r - h)^2}{4}$$

Considerando a integral do denominador, temos :

$$\int_a^r y^2\, dx = \int_a^r (r^2 - x^2)\, dx = \left[r^2 (x) - \left(\frac{x^3}{3}\right) \right]_a^r =$$

$$= \frac{2}{3} r^3 - ar^2 + \frac{a^3}{3}$$

Substituindo a pelo seu valor, temos :

$$\int_{r-h}^r y^2\, dx = \frac{2}{3} r^3 - (r - h)\, r^2 + \frac{(r - h)^3}{3} =$$

$$= h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$$

Substituindo estes valores na expressão de X, temos :

$$X = \frac{\dfrac{h^2 (2r - h)^2}{4}}{h^2 \left(r - \dfrac{h}{3} \right)} = \frac{3}{4} \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$$

Para termos o centro de gravidade do hemispherio basta fazer nesta formula :

$$h = r$$

Nesta hypothese, temos :

$$X = \frac{3}{4} \frac{r^2}{2\,r} = \frac{3}{8}\, r$$

35° — Consideremos um sector espherico gerado por um sector circular girando em torno do seu eixo de symetria, tomado para eixo dos x.

Neste caso sendo complicada a utilisação das coordenadas rectangulares, vamos resolvel-o pelas coordenadas polares que torna o calculo muito simples.

O centro de gravidade é dado pela fórmula

$$X = \frac{\iiint \rho^3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{\iiint \rho^2 \operatorname{sen} \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}$$

Representando o raio da esphera por r e por a o arco do sector gerador, temos:

$$X = \frac{\int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^a \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^r \rho^2 \, d\rho \int_0^a \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}$$

Considerando a integral V do denominador, temos :

$$V = \int_0^r \rho^2 \, d\rho \int_0^a \operatorname{sen} \theta \, d\theta \times 2\pi =$$

$$= 2\pi \int_0^r \rho^2 \, d\rho \left(\cos \theta \right)_0^a = 2\pi \int_0^r \rho^2 \, d\rho \, (1 - \cos a) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} r^3 \, (1 - \cos a)$$

Considerando a integral do numerador, temos :

$$\int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^a sen\ \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^a sen\ \theta \cos \theta \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^r \rho^3 \, d\rho . \ \frac{1}{2} \left(sen^2 \theta \right)_0^a =$$

$$= \pi \left(1 - \cos^2 a \right) \int_0^r \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi r^4}{4} \left(1 - \cos^2 a \right)$$

Substituindo na expressão de X temos, finalmente, para valor da abcissa do centro de gravidade

$$X = \frac{\frac{\pi r^4}{4} \left(1 + \cos a \right) \left(1 - \cos a \right)}{\frac{2\pi r^3}{3} \left(1 - \cos a \right)} = \frac{3}{8} r \left(1 + \cos a \right)$$

6º — Consideremos o paraboloide de revolução. Tomando para eixo dos x o eixo de symetria, o centro de gravidade é determinado pela equação

$$X = \frac{\int y^2 x \, dx}{\int y^2 \, dx}$$

Substituindo y^2 pelo seu valor dado pela equação da curva :

$$y^2 = 2 p x$$

temos :

$$X = \frac{\int x^2 \, dx}{\int x \, dx} = \frac{2}{3} x$$

2º — Consideremos o ellipsoide de revolução. A equação da curva:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

nos dá:

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{1}{a^2} x^2 \right)$$

Considerando a integral do denominador e substituindo este valor, temos:

$$\int y^2 \, dx = b^2 \int \left(1 - \frac{1}{a^2} x^2 \right) dx = b^2 \left(x - \frac{x^3}{3 a^2} \right.$$

Considerando a integral do numerador, temos:

$$\int y^2 x \, dx = b^2 \int \left(1 - \frac{1}{a^2} x^2 \right) x \, dx = b^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4 a^2} \right)$$

Substituindo estes valores na expressão de X, temos:

$$X = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4 a^2}}{x - \frac{x^3}{3 a^2}} = \frac{6 a^2 - 3 x^2}{12 a^2 - 4 x^2} x$$

A determinação do centro de gravidade do hyperboloide é em tudo semelhante.

Para terminar esta materia vamos fazer algumas applicações das fórmulas dos theoremas de Guldin de modo a que se possa fazer idéa dos recursos que a geometria póde tirar da solução do problema mecanico da determinação dos centros de gravidade.

1º — Consideremos o volume gerado pela revolução de um triangulo isosceles em torno de um eixo perpendicular á sua altura no vertice. Representando essa altura por h e por b a base, temos, para expressão da área do triangulo:

$$\frac{1}{2} h . b$$

O centro de gravidade achando-se a $^2/_3$ da altura, o caminho que elle percorre é igual a

$$2\pi \times \frac{2}{3} h$$

O volume V sendo igual ao producto da superficie geratriz por este caminho, temos:

$$V = 2\pi \times \frac{2}{3} h \times \frac{1}{2} h.\ b = \frac{2}{3} \pi h^2 b$$

22° — Consideremos o volume de um cone recto. Sendo a superficie geratriz um triangulo rectangulo (Fig. 85), representando por h a sua altura e por b a base, temos para valor da área :

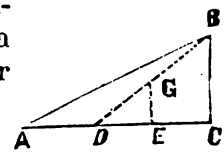


Fig. 85

$$\frac{1}{2} h.\ b$$

O centro de gravidade do triangulo achando-se em um ponto G a um terço da mediana $B\,D$, baixando a perpendicular $G\,E$ temos :

$$\frac{D\,B}{D\,G} = \frac{B\,C}{G\,E},\quad G\,E = \frac{b \times \frac{1}{3} D\,B}{D\,B} = \frac{1}{3} b$$

Sendo este o raio da circumferencia descripta pelo centro de gravidade, temos para o caminho percorrido por este ponto :

$$\frac{2}{3} \pi b$$

e, portanto, para o volume :

$$V = \frac{2}{3} \pi b \times \frac{1}{2} h\,b = \frac{1}{3} \pi b^2 h$$

Tirando as rectas

$$A\,p = y \text{ e } B\,b$$

perpendicular a

$$O\,y,$$

os triangulos

$$O\,c\,G \text{ e } A\,p\,B$$

nos dão :

$$\frac{A\,B}{O\,G} = \frac{y}{d}$$

donde:

$$d = \frac{r}{a} \cdot y$$

Substituindo temos para a superficie da zona:

$$S = 2\,\pi\,r.\,y.$$

8º — Consideremos o volume gerado pela área comprehendida entre uma parabola, o eixo da curva e uma ordenada perpendicular y cujo pé acha-se a uma distancia x do eixo de rotação. girando de um angulo π.

Achando-se o centro de gravidade da superficie a uma distancia do vertice igual a

$$\frac{3}{5}\,x$$

o caminho percorrido por este ponto tem para expressão :

$$\pi.\,\frac{3}{5}\,x,$$

A área da superficie geratriz tendo para expressão:

$$\frac{2}{3}\,x\,y,$$

o volume gerado será

$$V = \pi\,\frac{3}{5}\,x \times \frac{2}{3}\,x\,y = \frac{2}{5}\,\delta\,x^2\,y$$

Como vemos nenhuma difficuldade apresenta por este modo a determinação das superficies e volumes de revolução.

Reciprocamente por meio destas mesmas fórmulas poderiamos determinar os centros de gravidade conhecidas as expressões das superficies e volumes.

COMPOSIÇÃO DAS GRAVITAÇÕES MUTUAS

Newton pelo estudo dos phenomenos exteriores chegou por inducção a formular a seguinte lei geral que rege todos os movimentos do nosso systema planetario: *As moleculas do nosso mundo gravitam umas para outras na razão directa de suas massas e na razão inversa do quadrado de suas distancias mutuas.*

A quéda dos corpos na superficie da terra não é mais que um caso particular dessa lei, uma consequencia da *gravitação* mutua entre o corpo e o nosso planeta, embora a desigualdade extraordinaria das massas não permitta apreciar a gravitação da terra para o corpo.

Si o sol attrahe os planetas e estes aos satellites fazendo-os gravitar para o foco de suas orbitas respectivas por elles constituidas, os planetas tambem attrahem o sol e os satellites aos planetas, exercem identica acção uns sobre os outros e dahi as perturbações planetarias que tanto concorrem para tornar o estudo mathematico dos movimentos celestes um dos mais delicados e espinhosos problemas de calculo.

Considerando, pois, um ponto material sujeito a gravitar para todos os pontos de um corpo de fórma qualquer, fazendo passar por esse ponto um systema de eixos rectangulares e decompondo segundo os tres eixos as gravitações a que elle está sujeito, teremos as tres componentes da gravitação, as quaes compostas nos darão a gravitação total do ponto para o corpo considerado.

A theoria da gravitação vem a ser, por conseguinte, para as forças concurrentes, uma theoria analoga á da gravidade para as forças parallelas.

Nós devemos considerar a questão puramente sob um ponto de vista geral e depois particularisaremos a solução de conformidade com a relação caracteristica da lei de Newton.

Como no problema das gravitações concorrem as *forças*, as *massas* e as *distancias*, é claro que, para formulal-o algebricamente, necessitamos adoptar as medidas correspondentes que permittam avaliar essas grandezas.

Escolhidas as unidades de massa e distancia, vejamos como estabelecer a unidade do poder gravitativo.

Consideremos dous corpos de dimensões e fórma qualquer, cujas massas sejam iguaes e tomadas para unidade, gravitando um para o outro, e supponhamos que essa gravitação é constante em grandeza e direcção em toda extensão desses corpos, de sorte que ella seja entre dous pontos materiaes m e m_1 desses corpos, igual á que se daria si esses pontos se achassem a uma distancia um do outro igual á unidade.

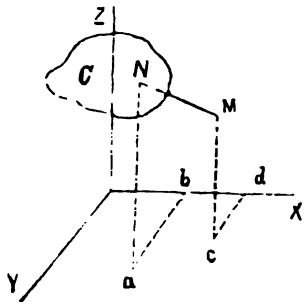


Fig. 87

Representando por f a gravitação total de um dos corpos sobre o outro, f será um coefficiente constante representando a unidade da gravitação de um corpo para o outro, referida á unidade de massa e á unidade de distancia.

Isto estabelecido supponhamos um corpo C composto de pontos N cujas massas e posições são dadas, e M um ponto exterior sujeito á gravitação para todos os pontos do corpo C (Fig. 87). Sejam m_1 a massa do ponto M,

$$x_1, y_1 \text{ e } z_1$$

as suas coordenadas relativamente a tres eixos rectangulares

$$OX \; OY \text{ e } OZ \; ; \; \rho$$

a densidade do corpo no ponto N,

$$x, y \text{ e } z,$$

as coordenadas deste ponto relativamente aos mesmos eixos e m a sua massa.

Supponhamos a gravitação do ponto M para cada ponto do corpo C, exercida na direcção $N\ M$, proporcional ao producto das massas m e m_1 e a uma formação

$$F\left(r\right)$$

da distancia MN, que designaremos por r. A gravitação de M para N será expressa pelo producto:

$$F = f\,m\,m_1\,F\left(r\right) \tag{1}$$

e a distancia r terá para expressão:

$$r^2 = \left(x - x_1\right)^2 + \left(y - y_1\right)^2 + \left(z - z_1\right)^2 \tag{2}$$

Os cosenos dos angulos que a gravitação (1), dirigida segundo r, forma com os eixos sendo respectivamente:

$$\frac{x - x_1}{r}, \quad \frac{y - y_1}{r}, \quad \frac{z - z_1}{r},$$

as componentes de F parallelamente a esses eixos serão :

$$F\,\frac{x - x}{r}, \quad F\,\frac{y - y_1}{r}, \quad F\,\frac{z - z_1}{r} \tag{3}$$

Decompondo o corpo C em volumes elementares

$$dx\ dy\ dz,$$

teremos para massa m de qualquer de seus elementos:

$$m = \rho\ dx\ dy\ dz.$$

Para obtermos a resultante das gravitações do ponto M para cada um dos pontos N do corpo, teremos que sommar as componentes (3) relativas a cada um desses pontos, o que nos dá, representando por

$$X,\ Y\ e\ Z$$

as sommas segundo os eixos dos

$$x\ y\ e\ z,$$

para componentes da resultante:

$$(4)\quad \begin{cases} X = fm_1 \iiint \rho\ F\ (r)\ \dfrac{x - x_1}{r}\ dx\ dy\ dz \\ Y = fm_1 \iiint \rho\ F\ (r)\ \dfrac{z - z_1}{r}\ dx\ dy\ dz \\ Z = fm_1 \iiint \rho\ F\ (r)\ \dfrac{z - z_1}{r}\ dx\ dy\ dz \end{cases}$$

Si o corpo C é homogeneo ρ será uma quantidade constante, no caso contrario será uma formação dada das coordenadas do ponto N.

O problema algebrico póde ser simplificado reduzindo-se a uma unica as tres integrações exigidas pelas relações (4).

Seja $\varphi\ (r)$ uma formação auxiliar tal que:

$$(5)\qquad \varphi\ (r) = \int F\ (r)\ dr$$

Façamos:

$$(6)\qquad \iiint \rho\ \varphi\ (r)\ dx\ dy\ dz = V,$$

a integral tripla estendendo-se a todo o corpo C. Sendo os limites independentes do ponto M e sendo V uma formação das coordenadas

$$x_1\ y_1\ e\ z_1$$

do mesmo ponto, teremos, differenciando (6) successivamente em relação a estas quantidades:

$$\frac{dV}{dx_1} = \iiint \rho\ \frac{d\varphi\ (r)}{dx_1}\ dx\ dy\ dz$$

$$\frac{dV}{dy_1} = \iiint \rho\ \frac{d\varphi\ (r)}{dy_1}\ dx\ dy\ dz$$

$$\frac{dV}{dz_1} = \iiint \rho\ \frac{d\varphi\ (r)}{dz_1}\ dx\ dy\ dz$$

Ou, attendendo á relação (5):

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx_1} = \iiint \rho\, F(r)\, \dfrac{dr}{dx_1}\, dx\, dy\, dz \\[2ex] \dfrac{dV}{dy_1} = \iiint \rho\, F(r)\, \dfrac{dr}{dy_1}\, dx\, dy\, dz \\[2ex] \dfrac{dV}{dz_1} = \iiint \rho\, F(r)\, \dfrac{dr}{dz_1}\, dx\, dy\, dz \end{cases}$$

Differenciando a expressão (2) da distancia em relação a

$$x_1,\ y_1\ e\ z_1,$$

temos:

$$\frac{dr}{dx_1} = -\frac{x - x_1}{r}$$

$$\frac{dr}{dy_1} = -\frac{y - y_1}{r}$$

$$\frac{dr}{dz_1} = -\frac{z - z_1}{r}$$

Substituindo estes valores em (7), resulta:

$$\frac{dV}{dx_1} = -\iiint \rho\, F(r)\, \frac{x - x_1}{r}\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{dV}{dy_1} = -\iiint \rho\, F(r)\, \frac{y - y_1}{r}\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{dV}{dz_1} = -\iiint \rho\, F(r)\, \frac{z - z_1}{r}\, dx\, dy\, dz$$

Substituindo estes valores nas expressões (4), teremos, finalmente:

$$(8)\quad \begin{cases} X = -fm_1\, \dfrac{dV}{dx_1} \\[2ex] Y = -fm_1\, \dfrac{dV}{dy_1} \\[2ex] Z = -fm_1\, \dfrac{dV}{dz_1} \end{cases}$$

para componentes da resultante:

$$(4)\quad \begin{cases} X = fm_1 \iiint \rho\ F\ (r)\ \dfrac{x - x_1}{r}\ dx\ dy\ dz \\ Y = fm_1 \iiint \rho\ F\ (r)\ \dfrac{z - z_1}{r}\ dx\ dy\ dz \\ Z = fm_1 \iiint \rho\ F\ (r)\ \dfrac{z - z_1}{r}\ dx\ dy\ dz \end{cases}$$

Si o corpo C é homogeneo ρ será uma quantidade constante, no caso contrario será uma formação dada das coordenadas do ponto N.

O problema algebrico póde ser simplificado reduzindo-se a uma unica as tres integrações exigidas pelas relações (4).

Seja $\varphi\ (r)$ uma formação auxiliar tal que:

$$(5)\qquad \varphi\ (r) = \int F(r)\ dr$$

Façamos:

$$(6)\qquad \iiint \rho\ \varphi\ (r)\ dx\ dy\ dz = V,$$

a integral tripla estendendo-se a todo o corpo C. Sendo os limites independentes do ponto M e sendo V uma formação das coordenadas

$$x_1\ y_1\ e\ z_1$$

do mesmo ponto, teremos, differenciando (6) successivamente em relação a estas quantidades:

$$\frac{dV}{dx_1} = \iiint \rho\ \frac{d\varphi\ (r)}{dx_1}\ dx\ dy\ dz$$

$$\frac{dV}{dy_1} = \iiint \rho\ \frac{d\varphi\ (r)}{dy_1}\ dx\ dy\ dz$$

$$\frac{dV}{dz_1} = \iiint \rho\ \frac{d\varphi\ (r)}{dz_1}\ dx\ dy\ dz$$

Ou, attendendo á relação (5):

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx_1} = \iiint \rho\, F(r)\, \dfrac{dr}{dx_1}\, dx\, dy\, dz \\ \dfrac{dV}{dy_1} = \iiint \rho\, F(r)\, \dfrac{dr}{dy_1}\, dx\, dy\, dz \\ \dfrac{dV}{dz_1} = \iiint \rho\, F(r)\, \dfrac{dr}{dz_1}\, dx\, dy\, dz \end{cases}$$

Differenciando a expressão (2) da distancia em relação a

$$x_1,\ y_1\ e\ z_1,$$

temos:

$$\frac{dr}{dx_1} = -\frac{x - x_1}{r}$$

$$\frac{dr}{dy_1} = -\frac{y - y_1}{r}$$

$$\frac{dr}{dz_1} = -\frac{z - z_1}{r}$$

Substituindo estes valores em (7), resulta:

$$\frac{dV}{dx_1} = -\iiint \rho\, F(r)\, \frac{x - x_1}{r}\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{dV}{dy_1} = -\iiint \rho\, F(r)\, \frac{y - y_1}{r}\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{dV}{dz_1} = -\iiint \rho\, F(r)\, \frac{z - z_1}{r}\, dx\, dy\, dz$$

Substituindo estes valores nas expressões (4), teremos, finalmente:

$$(8)\quad \begin{cases} X = -fm_1\, \dfrac{dV}{dx_1} \\ Y = -fm_1\, \dfrac{dV}{dy_1} \\ Z = -fm_1\, \dfrac{dV}{dz_1} \end{cases}$$

Como *no* e *Mo* são invariaveis conclue-se que as componentes são constantes para todos os elementos iguaes da camada espherica, ficando assim as forças de gravitação segundo *nM* substituidas por duas outras constantes : uma dirigida para o centro e a outra segundo uma parallela á direcção *OM*.

A resultante total obtem-se, pois, compondo as componentes segundo *no* e as componentes segundo *OM*.

Ora, as componentes na direcção *no* sendo neutralisadas pelas suas iguaes e directamente appostas correspondentes á acção exercida pelo ponto *M* sobre o elemento *n'*, relativo á extremidade opposta do diametro *nn'* ; e as outras componentes sendo forças parallelas, iguaes e no mesmo sentido, segue-se que a resultante total será a resultante destas forças parallelas, a qual terá para ponto de applicação o centro *O* de gravidade da camada espherica e será igual á somma das componentes (1) ou igual a:

$$R = f\,\omega_1\,M_1 \times Mo,$$

sendo M_1 a massa total da camada considerada.

Traduzida em linguagem vulgar, esta expressão nos mostra que a gravitação de um ponto para uma camada espherica homogenea é a mesma que seria si toda a materia da camada se achasse concentrada no seu centro, quando a gravitação mutua é proporcional á distancia.

2º — Consideremos agora o segundo caso e supponhamos:

$$F(r) = \frac{1}{r^2}$$

Esta hypothese corresponde á lei de Newton.

Substituindo este valor na equação (5) e integrando, temos:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{r}$$

E a equação (6), nos dá:

$$V_1 = -\iiint \frac{\varphi\, dx\, dy\, dz}{r} \tag{9}$$

As componentes, neste caso, serão:

$$\begin{cases} X = fm_1 \dfrac{d\,V_1}{dx_1} \\ Y = fm_1 \dfrac{d\,V_1}{dy_1} \\ Z = fm_1 \dfrac{d\,V_1}{dz_1} \end{cases} \tag{10}$$

A esta formação V_1 denominou Gauss *potencial*. Na integral (9) r deve ser tomado positivamente e, sendo assim, as componentes (10) tenderão a augmentar ou diminuir a distancia entre o ponto M e corpo C conforme o signal dessas componentes for positivo ou negativo.

A formação V_1 não dependendo sinão das distancias do ponto M aos diversos pontos do corpo C e das massas desses pontos, é claro que podemos variar as coordenadas sem que varie a formação V_1, de fórma que para obtermos a componente da gravitação total do ponto M para o corpo, estimada essa componente segundo uma direcção dada, basta tomarmos eixos rectangulares um dos quaes seja parallelo á direcção considerada e formular V_1 em formação das novas coordenadas.

Si, por exemplo, o novo eixo dos x' é o eixo parallelo á direcção dada, a componente da attracção parallela á esse eixo será:

$$fm_1 \frac{d\,V_1}{d\,x_1}$$

Supponhamos que se pede a componente da gravitação para o corpo C sobre a recta que une a origem das

Sommando estas derivadas, resulta:

$$\frac{d^2 V_1}{dx_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dy_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dz_1^2} =$$

$$= \iiint \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r^3} \left(3 - \frac{3\,(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}{r^2} \right).$$

Sendo o numerador do parenthesis igual a r^2, a expressão desses parenthesis é nulla, donde resulta, salvo o caso de ser

$$r = 0:$$

$$\text{(a)} \qquad \frac{d^2 V_1}{dx_1} + \frac{d^2 V_1}{dy_1} + \frac{d^2 V_1}{dz_1} = 0$$

Si $r = o$, isto é, si o ponto M pertence ao centro de gravitação a conclusão traduzida por esta equação não é verdadeira. Adiante consideraremos este caso.

Por este ligeiro estudo que deixamos feito conclue-se que sob o ponto de vista mathematico o problema da gravitação póde ser complicado:

1º, pela maior on menor complexidade da formação $F(r)$;

2º, pela fórma geometrica dos corpos considerados;

3º, pela lei que caracterisa a variação da densidade no interior desses corpos; todos estes elementos concorrendo para difficultar extraordinariamente a phase final da questão relativa á integração.

Mesmo mantendo-nos na hypothese que representa a lei newtonianna, só consideraremos dos casos particulares o mais simples, pois os mais complexos pertencem ao dominio da mecanica celeste.

Supponhamos o corpo C (Fig. 90) uma esphera ôca com centro em O e terminada por duas superficies esphericas de raios $R_1 = on$ e $R_2 = Om_1$ sendo a porção esphérica com-

prehendida pelas espheras R_1 e R_2 composta de camadas concentricas homogeneas cuja densidade ρ seja uma formação do raio da camada considerada.

Considerando o ponto M fóra da esphera de raio R_2, ou no interior da esphera de raio R_1 em qualquer destes casos esse ponto não fará parte do centro de gravitação constituido pela camada espherica comprehendida entre as espheras de raios R_1 e R_2. Sendo assim a equação (a) que traduz uma propriedade do potencial lhe será inteiramente applicavel.

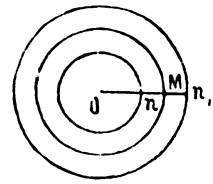


Fig. 50

A camada espherica considerada sendo symetrica quer quanto á fórma, quer quanto á distribuição das massas relativamente a todo plano passando pelo ponto O, a formação V_1 só dependerá da distancia r do ponto gravitante á origem. Mudando, pois, de coordenadas e tomando r para raio vector, temos :

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

donde :

$$\frac{dr}{dy_1} = \frac{y_1}{r}, \quad \frac{dr}{dx_1} = \frac{x_1}{r}, \quad \frac{dr}{dz_1} = \frac{z_1}{r}$$

Como V_1 é sómente formação de r, resulta :

$$\frac{dV_1}{dx_1} = \frac{dV_1}{dr} - \frac{dr}{dx_1}$$

$$\frac{d^2V_1}{dx_1^2} = \frac{d^2V_1}{dr^2}\left(\frac{dr}{dx_1}\right)^2 + \frac{dV_1}{dr} \cdot \frac{d^2r}{dx_1^2}$$

Substituindo nesta ultima derivada os valores de

$$\frac{dr}{dx_1} \quad \text{e} \quad \frac{d^2r}{dx_1^2}$$

deduzidos da expressão :

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{x_1}{r}$$

Por conseguinte a gravitação determinada por camadas esphericas homogeneas sobre um ponto exterior é identica á gravitação que se desenvolveria si toda a massa se achasse concentrada no centro commum de todas ellas.

Si o ponto M acha-se na camada espherica para a qual gravita, isto é, si achar-se entre as superficies esphericas de raios

$$R_1 \text{ e } R_2 \qquad \text{(Fig. ··)}$$

elle ficará para o exterior relativamente ás camadas cujos raios são comprehendidos entre R_1 ou On e r ou MO, e para o interior relativamente ás camadas cujos raios são comprehendidos entre

$$r \text{ e } R_2$$

ou On_1.

A gravitação para estas ultimas, como acabamos de ver, é nulla sobre o ponto e para as primeiras será representada por:

$$\frac{f\, m_1\, P'}{r^2}$$

sendo P' a massa das camadas comprehendidas entre

$$R_1 \text{ e } r.$$

Esta massa sendo dada pela expressão:

$$P' = \int_{R_1}^{r} 4\,\pi\,\rho\, r^2\, dr,$$

teremos:

$$\frac{dV_1}{dr} = \frac{C}{r^2} = -\frac{P'}{r^2} = -$$

$$-\frac{1}{r^2}\int_{R_1}^{r} 4\,\pi\,\rho\, r^2\, dr$$

Differenciando em relação a r, resulta :

$$\frac{d^2 V_1}{dr^2} = - \frac{4r^2 \pi \rho \times r^2 - 2r \int_{R_1}^{r} 4 \pi r^2 dr}{r^4}$$

ou :

$$\frac{d^2 V_1}{dr^2} = - 4 \pi \rho - \frac{2}{r^3} \int_{R_1}^{r} 4 \pi r^2 dr$$

Sommando e subtrahindo ao segundo membro o termo affecto da integração, temos, attendendo ao valor anterior de

$$\frac{dV_1}{dr}:$$

$$\frac{d^2 V_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV_1}{dr} = - 4 \pi \rho$$

Substituindo o primeiro membro pela sua expressão *(b)* anterior, teremos :

$$\frac{d^2 V_1}{dx_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dy_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dz_1^2} = - 4 \rho \pi$$

Por conseguinte quando o ponto gravitante fôr parte do corpo para o qual elle gravita, a somma das derivadas de segunda ordem do potencial é igual a

$$- 4 \rho \pi$$

Esta propriedade é geral pois que podemos sempre decompor o corpo C de que faz parte o ponto gravitante em duas partes : uma constituida por uma esphera de raio tão pequeno quanto se queira, comprehendendo o ponto M, e a outra do resto do corpo.

A formação V_1 ficará assim composta de duas partes, ou:

$$V_1 = V' + V''$$

sendo V' relativa á esphera e V'' relativa á outra parte do corpo.

Teremos, pois:

$$\frac{d^2 V_1}{dx_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dy_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dz_1^2} = \frac{d^2 V'}{dx_1^2} + \frac{d^2 V'}{dy_1^2} +$$

$$+ \frac{d^2 V'}{dz_1^2} + \frac{d^2 V''}{dx_1^2} + \frac{d^2 V''}{dy_1^2} + \frac{d^2 V''}{dz_1^2}$$

Como relativamente á segunda parte o ponto M não pertence á massa para á qual gravita, segue-se, como já vimos, que:

$$\frac{d^2 V''}{dx_1^2} + \frac{d^2 V''}{dy_1^2} + \frac{d^2 V''}{dz_1^2} = 0.$$

E relativamente á esphera, pertencendo á ella o ponto gravitante, resulta:

$$\frac{d^2 V'}{dx_1^2} + \frac{d^2 V'}{dy_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dz_1^2} = -4\rho\pi$$

donde:

$$\frac{d^2 V_1}{dx_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dy_1^2} + \frac{d^2 V_1}{dy_1^2} = -4\rho\pi$$

Assim, pois, combinando esta propriedade geral do *potencial* com a anteriormente estabelecida, podemos concluir que a somma das derivadas segundas da formação *potencial* V_1 é nulla quando o ponto gravitante não pertence ao systema para o qual gravita, e é igual a

$$-4\rho\pi$$

quando o ponto gravitante faz parte desse systema.

Tratemos a questão geometricamente.

Seja O o centro da camada espherica (Fig. 91), e M o ponto gravitante.

Consideremos um elemento nn' da superficie e unamos o ponto n ao ponto M.

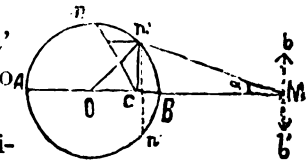


Fig. 91

A gravitação do ponto M será dirigida, relativamente ao elemento nn' segundo a recta Mn, e terá para valor:

$$\frac{f\,m\,\rho\,s}{\overline{n\,M}^2}$$

Sendo m a massa do ponto

M e s

a superficie do elemento nn'.

Decompondo esta gravitação segundo $M\,O$ e uma recta a esta perpendicular, $m\,b$, esta ultima será neutralisada pela sua igual e contraria correspondente ao ponto n' symetrico ao ponto n, de fórma que a gravitação fica reduzida á componente segundo a direcção $M\,O$, o que acontece para todos os outros pontos.

A componente segundo $M\,O$ tem para expressão:

$$\frac{f\,m\,\rho\,s}{\overline{n\,M}^2}\cos\alpha$$

sendo α o angulo

$O\,M\,n.$

No ponto n façamos o angulo

$c\,n\,o = \alpha,$

e os triangulos semelhantes

$O\,n\,c$ e $O\,n\,M$

nos dão:

$$\frac{O\,c}{O\,n} = \frac{O\,n}{O\,M}$$

ou:

$$O\,c = \frac{\overline{O\,n}^2}{O\,M}$$

O ponto c é, pois, um ponto fixo sobre a recta $O\,M$.

Do ponto c como centro descrevamos uma porção de superficie espherica e consideremos sobre esta superficie a parte $n\,n$ interceptada pelo cone cujo vertice é c e cuja base é a área nn'.

A superficie elementar nn, que representaremos por s_1, será a projecção orthogonal sobre a superficie espherica descripta de c, do elemento nn', e sendo o angulo dessas superficies igual ao de suas normaes:

$$c\,n \quad \text{e} \quad O\,n$$

e o angulo destas igual a α, resulta:

$$s_1 = s \cos \alpha$$

Os triangulos semelhantes

$$O\,c\,n \quad \text{e} \quad O\,M\,n$$

nos dão:

$$\frac{c\,n}{O\,n} = \frac{M\,n}{O\,M},$$

donde:

$$\overline{M\,n}^2 = \frac{\overline{c\,n}^2}{\overline{O\,n}^2} + \overline{O\,M}^2$$

Substituindo este valor na expressão da gravitação elementar, teremos para sua expressão segundo $M\,O$:

$$\frac{f\,m\,\rho\,s_1}{\overline{c\,n}^2 + \overline{O\,M}^2} + \overline{O\,n}^2$$

Porém a expressão:

$$\frac{S_1}{\overline{cn}^2}$$

representa a área $\delta\varphi$ da superficie interceptada pelo cone $n\ c\ u$ sobre a esphera descripta de c com raio igual á unidade, e, portanto,

$$\Sigma\delta\psi$$

representa a somma de todos os elementos $d\varphi$ em torno do ponto c ou 4π, donde resulta, por serem todos os outros factores constantes, para expressão da gravitação total do ponto M para todos os pontos da camada espherica:

$$\frac{f\,m\,\rho\,4\pi\,\overline{On}^2}{\overline{OM}^2},$$

isto é, a gravitação dá-se como si toda a massa da camada espherica se achasse concentrada no centro O.

Suppondo em vez de uma camada espherica uma esphera composta de uma infinidade de camadas esphericas concentricas e homogeneas, o mesmo raciocinio anterior se applicaria a cada uma dessas camadas, de modo que a *gravitação determinada por uma esphera massiça, composta de camadas concentricas* e *homogeneas, sobre um ponto exterior, é a mesma que seria si toda a massa da esphera se achasse concentrada no seu centro.*

Considerando, finalmente, duas espheras massiças

$$E \quad \text{e} \quad E'$$

constituidas como a anterior, a gravitação de um ponto da esphera E' para a esphera E não se altera, conforme a conclusão anterior, si suppuzermos a massa da esphera E concentrada em seu centro, o que reduz a questão a se determinar a gravitação de um ponto ficticio de massa igual

AUG 2 0 1934